Cálculo Diferencial e Integral I

Texto de apoio às aulas.

M. Amélia Bastos, António Bravo

2010

O texto apresentado tem por objectivo ser um texto de apoio ao curso de Cálculo Diferencial e Integral I do Mestrado em Engenharia Aeroespacial e do Mestrado em Engenharia Mecânica. Consiste em cinco capítulos que desenvolvem a matéria apresentada nas aulas teóricas da referida disciplina ainda que algumas demonstrações apresentadas e assinaladas com (*) sejam consideradas facultativas. Cada capítulo termina com um conjunto de exercícios alguns dos quais resolvidos.

M. Amélia Bastos e António Bravo

Conteúdo

1 Números reais **1**
1.1 Axiomas de corpo e de ordem 1
1.2 O conjunto $\mathbb{N}$. Indução Matemática 6
1.3 Axioma do supremo 9
1.4 Densidade de conjuntos de racionais e irracionais em $\mathbb{R}$ 12
1.5 Exercícios 15
1.5.1 Exercícios resolvidos 15
1.5.2 Enunciados de exercícios 17

2 Sucessões reais **19**
2.1 Sucessões. Convergência de sucessões 19
2.2 Propriedades algébricas de sucessões. Sucessões enquadradas . 24
2.3 Convergência de sucessões em $\overline{\mathbb{R}}$. Cálculo de limites 27
2.4 Subsucessões 31
2.5 Sucessão de Cauchy. Sucessão contractiva 36
2.6 Exercícios 40
2.6.1 Exercícios resolvidos 40
2.6.2 Enunciados de exercícios 46

3 Funções reais de variável real.
Continuidade.Diferenciabilidade. **49**
3.1 Definição de função real de variável real 49
3.2 Continuidade local à Cauchy e à Heine 51
3.3 Definição de limite. Limites laterais. 55
3.4 Funções contínuas em intervalos. 60
3.5 Continuidade da função inversa. 65
3.6 Diferenciabilidade. Função derivada 66
3.7 Derivada da função composta. Derivada da função inversa . . 70
3.8 Extremos relativos. Teorema de Lagrange. 74
3.9 Teorema de Cauchy. Regra de Cauchy 79

3.10 Derivadas de ordem superior.
Fórmula de Taylor 83
3.11 A fórmula de Taylor e os extremos de uma função 87
3.12 Assíntotas ao gráfico de uma função 89
3.13 Exercícios 92
3.13.1 Exercícios resolvidos 92
3.13.2 Enunciados de exercícios 104

4 Integral de Riemann **108**
4.1 Definição do integral de Riemann 108
4.2 Critérios de integrabilidade 113
4.3 Integrabilidade de funções monótonas e contínuas 115
4.4 Teorema fundamental do cálculo integral. Fórmula de Barrow 122
4.5 Métodos gerais de integração 125
4.6 Integração de funções racionais 129
4.7 Integração de funções irracionais e de funções trigonométricas 138
4.8 Exercícios 141
4.8.1 Exercícios resolvidos 141
4.8.2 Enunciados de exercícios 151

5 Séries numéricas e séries de potências **153**
5.1 Série numérica. Definição. Exemplos. 153
5.2 Critério de Cauchy. Consequências 159
5.3 Critérios de convergência para séries de termos não negativos . 161
5.4 Séries absolutamente convergentes 169
5.5 A soma de séries 170
5.6 Séries de potências 173
5.7 Exercícios 177
5.7.1 Exercícios resolvidos 177
5.7.2 Enunciados de exercícios 184

Capítulo 1

Números reais

As propriedades do conjunto dos números reais têm por base um conjunto restrito de propriedades básicas estabelecidas por axiomas que levam a designar o conjunto dos números reais, com as operações de adição e multiplicação, por corpo ordenado completo. Sem ter por objectivo a construção de todo o edifício do conjunto dos números reais vai-se, neste primeiro capítulo, indicar as referidas propriedades básicas, estabelecidas nos axiomas de corpo e de ordem, e dar particular importância ao axioma da completude e a algumas das suas consequências. Vai-se ainda analisar o subconjunto dos números reais designado por conjunto dos números naturais e o princípio de indução matemática, princípio que constitui um instrumento importante para estabelecer propriedades envolvendo a variável natural. Termina-se o capítulo estabelecendo resultados de densidade de conjuntos de números racionais e irracionais em conjuntos de números reais.

1.1 Axiomas de corpo e de ordem

Considere-se um conjunto designado por $\mathbb{R}$ cujos elementos se designam por números reais e duas operações binárias:

- A operação adição

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ ^{1} \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \to x + y$$

- A operação multiplicação

$$. : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \to x.y$$

[1] $A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}$ é por definição o produto cartesiano de A por B.

Vai-se estabelecer para $(\mathbb{R}, +, .)$ recorrendo a axiomas, proposições que não podem ser deduzidas a partir de outras mais elementares, propriedades algébricas e propriedades de ordem.

Axiomas de corpo

Axioma 1. *A adição e a multiplicação são operações comutativas em* $\mathbb{R}$.

$$x + y = y + x \qquad\qquad x.y = y.x \qquad\qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Axioma 2. *A adição e multiplicação são operações associativas em* $\mathbb{R}$.

$$(x + y) + z = x + (y + z) \qquad\qquad (x.y).z = x.(y.z) \qquad\qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Axioma 3. *A adição e a multiplicação são operações com elementos neutros que são números reais distintos i.e.*

$$\underset{u\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ x + u = x \qquad\qquad \underset{v\in\mathbb{R}\setminus\{u\}}{\exists}\ \underset{y\in\mathbb{R}}{\forall}\ y.v = y$$

Axioma 4.

- *Todo o número real tem simétrico i.e.*

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{y\in\mathbb{R}}{\exists}\ x + y = u$$

- *Todo o número real distinto de u tem inverso i.e.*

$$\underset{x\in\mathbb{R}\setminus\{u\}}{\forall}\ \underset{y\in\mathbb{R}}{\exists}\ x.y = v$$

Axioma 5. *A multiplicação é distributiva a respeito da adição.*

$$x.(y + z) = x.y + x.z \qquad\qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

$\mathbb{R}$ é um grupo comutativo relativamente à adição e $\mathbb{R} \setminus \{u\}$ um grupo comutativo relativamente à multiplicação.

Qualquer terno constituido por um conjunto e duas operações designadas por adição e multiplicação que verificam os cinco axiomas anteriores é um corpo. $(\mathbb{R}, +, .)$ é um corpo.

Os chamados axiomas de corpo estabelecem as propriedades algébricas básicas de $\mathbb{R}$. Dos axiomas de corpo podem deduzir-se as propriedades algébricas dos números reais. Vejamos alguns exemplos simples de como deduzir essas propriedades.

i) *Unicidade do elemento neutro.*
Admita-se que existem dois elementos neutros u e u'. Tem-se

$$\underset{u\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ x+u=x \underset{x=u'}{\Rightarrow} u'+u=u'$$

e por outro lado

$$\underset{u'\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ x+u'=x \underset{x=u}{\Rightarrow} u+u'=u$$

vindo do axioma 1, que $u = u'$. O elemento neutro é pois único e representa-se por 0.
Analogamente no caso da multiplicação se pode concluir que o elemento neutro é único e se representa por 1.

ii) *Unicidade do simétrico.*
Sejam y, y' simétricos de x, $x + y = 0$ e $x + y' = 0$,

$$y' = y' + 0 = y' + (x + y) = (y' + x) + y = 0 + y = y \ \Rightarrow\ y = y'$$

O elemento simétrico de x é único e representa-se por $-x$.
Também na multiplicação o elemento inverso é único e representa-se por x^{-1}.

iii) *Lei do corte para a adição.*
Mostre-se que

$$x + y = x + z \Rightarrow y = z \qquad\qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Adicionando $(-x)$ a ambos os membros do antecedente da implicação anterior tem-se

$$(-x)+(x+y) = (-x)+(x+z) \Leftrightarrow ((-x)+x)+y = ((-x)+x)+z \Leftrightarrow 0+y = 0+z$$

vindo $y = z$.

iv) *A equação $a + x = b$ tem solução única.*
Seja $x = (-a) + b$. Tem-se

$$a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$$

consequentemente $x = (-a)+b$ é solução da equação indicada. A solução é única pois de $a + x = b$ e $a + x_1 = b$ tem-se $a + x = a + x_1$ vindo pela lei do corte para a adição $x = x_1$.

v) *O elemento* 0 *é absorvente na multiplicação.*
Seja $x \in \mathbb{R}$. Tem-se por um lado $x = x + 0$ e por outro

$$x = x.1 = x.(1 + 0) = x.1 + x.0 = x + x.0$$

Assim da lei do corte para a adição conclui-se que $x.0 = 0$.

Definição 1.1.1. *A subtracção é a operação binária que associa a cada par ordenado* $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *o número real* $x + (-y)$.

Definição 1.1.2. *A divisão é a operação binária que associa a cada par ordenado* $(x, y) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ *o número real* $x.y^{-1}$ *(habitualmente representado por* $\dfrac{x}{y}$ *).*

Seja o subconjunto de $\mathbb{R}$ designado por $\mathbb{R}^+$ cujos elementos se designam por números reais positivos e defina-se o subconjunto de $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^- = \{a \in \mathbb{R} \, : \, -a \in \mathbb{R}^+\}$$

designado por conjunto dos números reais negativos.

Axiomas de ordem

Axioma 6. $\mathbb{R}^+$ *é um subconjunto fechado de* $\mathbb{R}$ *para a adição e multiplicação i.e.*

$$a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^+ \;\; e \;\; a.b \in \mathbb{R}^+.$$

Axioma 7. *Se* $a \in \mathbb{R}$ *uma e só uma das proposições seguintes é verdadeira*

$$a \in \mathbb{R}^+ \; ; \qquad a = 0 \; ; \qquad -a \in \mathbb{R}^+.$$

i.e. qualquer número real distinto de 0 *é real positivo ou real negativo e nenhum real é positivo e negativo.*

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \qquad e \qquad \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \emptyset.$$

As propriedades de ordem dos números reais podem ser deduzidas a partir destes axiomas.

Definição 1.1.3. *Relação menor em* $\mathbb{R}$ *é por definição uma relação de ordem* R, $x < y$, *tal que:*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \, : \;\; y + (-x) \in \mathbb{R}^+\} \tag{1.1.1}$$

Convenciona-se que $x < y$ é equivalente a $y > x$, i.e. y maior que x. Se $a \in \mathbb{R}^+$ ($-a \in \mathbb{R}^+$) diz-se que a é um número real positivo (negativo) e escreve-se $a > 0$ ($a < 0$).

A relação menor verifica evidentemente as propriedades das relações de ordem

Propriedade Tricotómica

Sendo $x, y \in \mathbb{R}$ verifica-se uma e só uma das proposições

$$x < y \qquad ; \qquad x > y \qquad ; \qquad x = y$$

De facto do axioma 7 para $y + (-x) \in \mathbb{R}$, tem-se $y + (-x) \in \mathbb{R}^+$ ou $y + (-x) \in \mathbb{R}^-$ ou $y + (-x) = 0$.

Propriedade Transitiva

Quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ se $x < y$ e $y < z$ tem-se $x < z$.

De facto sendo $y + (-x) \in \mathbb{R}^+$ e $z + (-y) \in \mathbb{R}^+$ tem-se $z + (-x) \in \mathbb{R}^+$ pois

$$((z + (-y)) + (y + (-x))) + x = (z + (-y)) + ((y + (-x)) + x) = z$$

vindo pelo axioma 6

$$z + (-x) = (z + (-y)) + (y + (-x)) \Rightarrow z + (-x) \in \mathbb{R}^+$$

O teorema seguinte, que se apresenta sem demonstração, mostra a compatibilidade entre a relação de ordem indicada e as operações algébricas. $(\mathbb{R}, +, .)$ é um corpo ordenado.

Teorema 1.1.4. *Quaisquer que sejam* $x, y, z, u, v \in \mathbb{R}$

i) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$ *(monotonia da adição);*

ii) $x < y \wedge u < v \Rightarrow x + u < y + v$

iii) $x < y \wedge z > 0 \Rightarrow xz < yz$
$x < y \wedge z < 0 \Rightarrow xz > yz$ *(monotonia parcial da multiplicação).*

Como aplicação ordenem-se alguns elementos de $\mathbb{R}$. Em particular estabeleça-se

$$-2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4$$

De facto

i) $0 < 1$
Tem-se: $0 < 1 \lor 1 < 0 \lor 0 = 1$. Ora $0 = 1$ é impossível.
Por outro lado se $1 < 0$ tem-se $1.1 > 0.1$ ou seja $1 > 0$, o que é absurdo pois admitiu-se $1 < 0$.

ii) Sendo $0 < 1$ tem-se que qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, $0 + x < 1 + x$ vindo $x < x + 1$.
Assim representando $1 + 1$ por 2, $2 + 1$ por 3, $3 + 1$ por 4 tem-se $1 < 2\,,\ 2 < 3\,,\ 3 < 4$ e aplicando a propriedade transitiva $0 < 1 < 2 < 3 < 4$.
Por outro lado $-1 < 0$ já que de $0 < 1$ e pela monotonia da adição se tem $(-1) + 0 < (-1) + 1$. Assim $(-1) + (-1) < 0 + (-1)$, e uma vez que $(-1) + (-1) = -(1 + 1)$, tem-se $-(1 + 1) < -1$ e $-2 < -1$.

1.2 O conjunto $\mathbb{N}$. Indução Matemática

Comece-se por definir $\mathbb{N}$, o conjunto dos números naturais.

Definição 1.2.5. *Um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ é um conjunto indutivo se e só se*

(i) $1 \in S$.

(ii) Se $a \in S$ então $a + 1 \in S$.

Exemplo 1.2.6.

i) $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ *são conjuntos indutivos.*

ii) $\{1\}$ *não é um conjunto indutivo.*

Um número real é um número natural se e só e se pertence a qualquer conjunto indutivo de números reais. O conjunto de todos os números naturais representa-se por $\mathbb{N}$.

Definição 1.2.7. *O conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, é a intersecção de todos os subconjuntos indutivos de $\mathbb{R}$.*

Como consequência desta definição em particular tem-se

i) $1 \in \mathbb{N}$, $2 \in \mathbb{N}$, $3 \in \mathbb{N}$.

ii) Dado $a \in \mathbb{R}$ tal que $1 < a < 2$. Tem-se que $a \notin \mathbb{N}$.

Considere-se

$$S_1 = \{1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 2\}$$

De facto S_1 é indutivo concluindo-se que $\mathbb{N} \subset S_1$. Ora S_1 não contém a, assim $\mathbb{N}$ não contém a nem nenhum número real entre 1 e 2.

Proposição 1.2.8. *O conjunto* $\mathbb{N}$ *de todos os números naturais é um conjunto indutivo.*

Demonstração.

i) $1 \in \mathbb{N}$.

ii) Seja $k \in \mathbb{N}$. Então k pertence a qualquer conjunto indutivo S. Para cada conjunto indutivo se k é um elemento também $k+1$ o é. Assim $k+1$ pertence a qualquer conjunto indutivo e consequentemente $k+1 \in \mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ tem a propriedade (ii).

Assim $\mathbb{N}$ é indutivo. ∎

A proposição anterior assegura que a intersecção de conjuntos indutivos é um conjunto indutivo. O teorema seguinte assegura que qualquer conjunto indutivo de números naturais é o conjunto $\mathbb{N}$.

Teorema 1.2.9 (Princípio de indução matemática)**.** *Se S é um conjunto indutivo de números naturais então $S = \mathbb{N}$.*

Demonstração.
Se S é um conjunto indutivo sabe-se da definição de conjunto dos números naturais que $\mathbb{N}$ está contido em S ($\mathbb{N} \subset S$).
Uma vez que S é constituido por números naturais segue-se que S está contido em $\mathbb{N}$ ($S \subset \mathbb{N}$).
Conclui-se assim que $S = \mathbb{N}$. ∎

Corolário 1.2.10. $\mathbb{N}$ *é o único conjunto indutivo contido nele próprio.*

Vejamos como aplicar o princípio de indução matemática na prática.

Exemplo 1.2.11. *Mostre-se que qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.*

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Seja S o conjunto dos naturais para os quais a fórmula anterior se verifica i.e.

$$S = \{n \in \mathbb{N}: \quad 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\}$$

Mostre-se que S é indutivo.
• $1 \in S$ (a formula é verdadeira para $n = 1$).
• Seja $m \in S$. Atendendo à definição de S, a fórmula é verdadeira para $n = m$.

$$1 + 2 + \ldots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

Some-se $m + 1$ ao primeiro membro da igualdade anterior

$$1+2+\ldots+m+(m+1) = \frac{m(m+1)}{2}+(m+1) = (m+1)(\frac{m}{2}+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

A formula é também válida para $n = m + 1$.
Assim $m + 1 \in S$ se $m \in S$. S é um conjunto indutivo de números naturais e consequentemente $S = \mathbb{N}$. A fórmula verifica-se para todos os naturais.

O teorema 1.2.9 é a base para introduzir uma técnica de demonstração de propriedades em $\mathbb{N}$ designada por princípio de indução matemática. Demonstrar que a propriedade P é verdadeira em $\mathbb{N}$ reduz-se a:

i) Mostrar que $P(1)$ é verdadeira.

ii) Se $P(m)$ é verdadeira para $m \in \mathbb{N}$ mostrar que $P(m+1)$ é verdadeira.

Exemplo 1.2.12. *Mostre-se que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$*

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

i) Mostre-se que a proposição é verdadeira para $n = 1$

$$1 + r + = \frac{1 - r^2}{1 - r} = 1 + r$$

ii) Sendo $P(m)$ uma proposição verdadeira para $n = m$ mostre-se que $P(m+1)$ é uma proposição verdadeira.

Mostre-se que é verdadeira a implicação

$$1+r+r^2+\ldots+r^m=\frac{1-r^{m+1}}{1-r}\Rightarrow 1+r+r^2+\ldots+r^m+r^{m+1}=\frac{1-r^{m+2}}{1-r}$$

Adicionando r^{m+1} a ambos os membros da equação, hipótese de indução, tem-se

$$1+r+r^2+\ldots+r^m+r^{m+1}=\frac{1-r^{m+1}}{1-r}+r^{m+1}$$

que é uma proposição verdadeira.

1.3 Axioma do supremo

Os sete axiomas de corpo estabelecidos são verificados quer por $(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$ quer por outros conjuntos. O axioma do supremo é fundamental para caracterizar completamente $\mathbb{R}$ sendo conhecido como o axioma da continuidade ou da completude.

Antes de se introduzir o axioma do supremo veja-se algumas definições.

Definição 1.3.13. *Seja $S\subset\mathbb{R}$*
O número real M é um majorante de S se $x\leq M$, qualquer que seja $x\in S$.
O número real m é um minorante de S se $x\geq m$, qualquer que seja $x\in S$.

Definição 1.3.14. *Seja $S\subset\mathbb{R}$*
O conjunto S é limitado superiormente ou majorado se tem majorantes.
O conjunto S é limitado inferiormente ou minorado se tem minorantes.
O conjunto S é limitado se for limitado superiormente e inferiormente.

Definição 1.3.15. *d é mínimo de S se $d\in S$ e d é minorante de S.*
c é máximo de S se $c\in S$ e c é majorante de S.

Definição 1.3.16. *Sendo V o conjunto dos majorantes de S ($V=\emptyset$ se S não for majorado) designa-se por supremo de S, $\sup S$, o elemento mínimo de V.*

Designa-se por *ínfimo* de S, $\inf S$, o máximo do conjunto dos minorantes de S.

Axioma 8 (Axioma do supremo)**.** *Qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e majorado tem supremo em $\mathbb{R}$.*

Assim $(\mathbb{R},\mathbb{R}^+,+,.)$ é um corpo ordenado completo

Exemplo 1.3.17. *Determine-se o supremo de*

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ x = 1 - 1/m, \ m \in \mathbb{N}\}$$

Verifique-se que 1 é supremo de S.

- $1 - 1/m \leq 1$ pois $m \in \mathbb{N}$. Assim 1 é majorante.

- 1 é supremo.
  Seja $\epsilon_1 = 1 - \epsilon$ em que $1 > \epsilon > 0$. Existe $x \in S \ : \ x > 1 - \epsilon$ já que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $1 - 1/m > 1 - \epsilon \Leftrightarrow 1/m < \epsilon \Leftrightarrow m > 1/\epsilon\,.$

A ideia usada no exemplo anterior é a base de um resultado geral para caracterizar supremos de conjuntos.

Proposição 1.3.18. *Seja $S \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente. O número real s é supremo de S se e só se*

i) $\underset{x \in S}{\forall} \ x \leq s$

ii) $\underset{\epsilon > 0}{\forall} \ \underset{x \in S}{\exists} \ x > s - \epsilon$

Demonstração.
• Mostre-se que:
(i),(ii) $\Rightarrow$ s é supremo.
Faça-se a demonstração da proposição anterior por contradição.
Suponha-se que se tem (i),(ii) e existe s_0 um majorante de S tal que $s_0 < s$.
Seja $\epsilon = s - s_0$. De (ii) existe $x \in S$ tal que

$$x > s - (s - s_0)$$

i.e. $x > s_0$ e s_0 não é majorante. Assim tem-se uma contradição e s é supremo.

• Mostre-se que:
s é supremo $\Rightarrow$ (i),(ii).
Se s é supremo então, é majorante ou seja tem-se (i) e por outro lado qualquer que seja $\epsilon > 0$, $s - \epsilon$ não é majorante ou seja quando $\epsilon > 0$ existe $x > s - \epsilon$. ■

Análogamente se mostra

Proposição 1.3.19. *Seja $S \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado inferiormente. O número real r é infímo de S se e só se* *i)* $\underset{x\in S}{\forall} : \; x \geq r$

ii) $\underset{\epsilon>0}{\forall} \; \underset{x\in S}{\exists} : \; x < r + \epsilon$

Os resultados anteriores permitem concluir

Proposição 1.3.20. *Qualquer subconjunto de* $\mathbb{R}$ *não vazio e minorado tem infimo em* $\mathbb{R}$*.*

Demonstração.
Sendo $X \subset \mathbb{R}$ não vazio e minorado $-X$, constítuido pelos simétricos dos elementos de X, é não vazio e majorado e

$$-\sup(-X) = \inf X$$

De imediato do axioma do supremo tem-se o resultado. ■

Analise-se duas consequências directas do axioma do supremo fazendo intervir o conjunto $\mathbb{N}$.

Proposição 1.3.21. *O conjunto* $\mathbb{N}$ *não é majorado.*

Demonstração.
Sendo $s = \sup \mathbb{N}$ tem-se:

$$\underset{m\in\mathbb{N}}{\forall} : \; m \leq s$$

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \; \underset{n\in\mathbb{N}}{\exists} : \; n > s - \epsilon$$

Em particular seja $\epsilon = 1$. Tem-se $n > s - 1$ e consequentemente $n + 1 > s$. Como $\mathbb{N}$ é indutivo $n + 1 \in \mathbb{N}$ e s não é supremo de $\mathbb{N}$. ■

Proposição 1.3.22 (Propriedade arquimediana)**.** *Sendo* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a > 0$*, existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $ma > b$*.*

Demonstração.
$\mathbb{N}$ não é majorado consequentemente $\underset{m\in\mathbb{N}}{\exists} : \; m > b/a$. Assim sendo $a > 0$ tem-se $am > b$. ■

1.4 Densidade de conjuntos de racionais e irracionais em $\mathbb{R}$

Em $\mathbb{R}$ existem subconjuntos importantes para além do conjunto $\mathbb{N}$.

Definição 1.4.23. *O conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}$, é por definição*

$$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{N} \vee x = 0 \vee -x \in \mathbb{N}\}$$

Definição 1.4.24. *O conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, é por definição*

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : \ x = p.q^{-1} \ \ p, q \in \mathbb{Z}\,, \ \ q \neq 0\}$$

Naturalmente se coloca a questão de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ser ou não um conjunto vazio. O axioma do supremo apresentado na secção anterior permite responder a esta questão.

Proposição 1.4.25.

i) Nenhum número racional é solução de $x^2 = 2$.

ii) Existe pelo menos um número real que é solução de $x^2 = 2$.

Demonstração.

i) Seja $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$. Considere-se $r > 0$ pois $(-x)^2 = x^2$. Tem-se

$$r = \frac{p}{q} \qquad p, q \in \mathbb{N}, \quad p, q \quad \text{primos entre si}$$

De $r^2 = 2$ tem-se

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \;\Rightarrow\; p^2 = 2q^2 \;\Rightarrow\; p \quad \text{é par} \;\Rightarrow\; \underset{k \in \mathbb{N}}{\exists}\; p = 2k$$

Assim

$$4k^2 = 2q^2 \;\Rightarrow\; q^2 = 2k^2 \;\Rightarrow\; q \quad \text{é par}$$

É impossível p e q serem pares pois p e q são primos entre si. Não existe solução da equação em $\mathbb{Q}$

ii) Seja

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0 \wedge x^2 < 2\}$$

- $A \neq \emptyset$ uma vez que $1 \in A$.
- A é majorado ($x < 2$ qualquer que seja $x \in A$ pois se $x \geq 2$ tem-se $x^2 \geq 2^2 > 2$ e $x \notin A$).

Do axioma do supremo conclui-se que existe um número real $s = \sup A$ e como $1 \in A$, $s \geq 1$.
Ora pela propriedade tricotómica

$$s^2 < 2 \quad \vee s^2 > 2 \quad \vee s^2 = 2.$$

Por absurdo, usando a propriedade arquimediana pode mostrar-se, [1] que não se tem $s^2 > 2$ nem $s^2 < 2$. Tem-se pois $s^2 = 2$ em que

$$s = \sup\{x \in \mathbb{R} : \ x > 0 \wedge x^2 < 2\}$$

representando-se s por $\sqrt{2}$.

■

Teorema 1.4.26 (Propriedade de densidade)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Existe um número racional u e um número irracional v tais que $u, v \in]a, b[$.*

Demonstração.
• Considere-se $a = 0$. A propriedade arquimediana garante a existência de $m, n \in \mathbb{N}$ tais que

$$m.b > 1 \qquad n.b > \sqrt{2}$$

Nestas condições sendo

$$r = \frac{1}{m} \quad ; \qquad s = \frac{\sqrt{2}}{n}$$

r é um número racional e s irracional tais que

$$r, s \in]0, b[$$

• Considere-se $a > 0$. Procure-se um racional $u \in]a, b[$ partindo da existência de um racional no intervalo de extremo inferior zero. Fazendo $c = b - a$ existe $r \in]0, c[$, $r \in \mathbb{Q}$. Ora

$$r < c = b - a \Rightarrow a + r < b$$

Seja

$$A = \{k \in \mathbb{N} : \ k.r > a\}$$

Como $A \subset \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$ o conjunto A tem elemento mínimo $k_0 = \min A$. Seja

$$u = k_0.r$$

Tem-se $u \in \mathbb{Q}$ $(r \in \mathbb{Q}, k_0 \in \mathbb{N})$ e $a < u < b$ já que como $k_0 \in A$, $u = k_0.r > a$. Por outro lado dado que $k_0 - 1 \notin A$

$$(k_0 - 1)r \leq a \Rightarrow u = k_0.r \leq a + r \underset{a+r<b}{\Rightarrow} u < b.$$

Para obter um número irracional $v \in]a, b[$ repete-se o processo substituindo r por $s \in]0, c[$ número irracional. Designando k_0 o minimo do conjunto dos naturais k tais que $k.s > a$ e sendo $v = k_0.s$ tem-se que v é um numero irracional e $v \in]a, b[$. ■

Definição 1.4.27. *Um conjunto X diz-se um conjunto finito, com m elementos se existir uma bijecção*[2] *do conjunto $\{1, 2, \ldots, m\}$ sobre X. Designa-se por conjunto infinito qualquer conjunto que não é finito.*

Teorema 1.4.28. *Em qualquer intervalo de $\mathbb{R}$ não degenerado $]a, b[$, $a < b$, existe um conjunto infinito de números racionais e um conjunto infinito de números irracionais i.e os conjuntos $]a, b[\cap \mathbb{Q}$ e $]a, b[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ são conjuntos infinitos.*

Demonstração.
Mostre-se que $X =]a, b[\cap \mathbb{Q}$ é um conjunto infinito.
Do teorema 1.4.26 X é não vazio. Admita-se que é um conjunto finito. X teria minimo, $c = \min X$, e máximo, $d = \max X$. Sendo $X \subset]a, b[$

$$a < c \leq d < b$$

e

$$X \subset [c, d]$$

Assim qualquer número racional pertencente a $]a, b[$ pertencia a $[c, d]$ não existindo qualquer número racional em $]a, c[$ e $]d, b[$ em contradição com o teorema 1.4.26.
Analogamente se mostra que $]a, b[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ é um conjunto infinito. ■

[2]uma bijecção é uma aplicação $\varphi : A \to B$, que é injectiva ($a_1 \neq a_2 \Rightarrow \varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$, $a_1, a_2 \in A$) e sobrejectiva ($\varphi(A) = \{\varphi(a) : a \in A\} = B$)

1.5 Exercícios

1.5.1 Exercícios resolvidos

Exerc 1.5.1. *Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *mostre a desigualdade triangular*

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$ [3]

Resolução.

• Se $a, b \geq 0$, $a+b \geq 0$ e

$$|a+b| = a+b = |a| + |b|$$

• Se $a, b \leq 0$, $a+b \leq 0$

$$|a+b| = (-a) + (-b) = |a| + |b|$$

• Se $a \leq 0$ e $b \geq 0$ e

$$a+b = -|a| + |b| \Rightarrow |a+b| = |-|a| + |b|| \leq |a| + |b|$$

• Se $a \geq 0$, $b \leq 0$ e

$$a+b = |a| + (-|b|) \Rightarrow |a+b| = ||a| - |b|| \leq |a| + |b|$$

■

Exerc 1.5.2. *Considere o seguinte conjunto* $A = \{x \in \mathbb{R} : \ |x| - x^2 + 2 > 1\}$. *Determine, caso existam, o supremo, infimo, máximo e mínimo do conjunto* A.

Resolução.

$$|x| > x^2 - 1 \Leftrightarrow x > x^2 - 1 \ \vee \ x < 1 - x^2$$

$$x^2 - x - 1 < 0 \ \vee \ x^2 + x - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[\ \vee \ x \in \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$$

$$A = \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$$

A é um conjunto majorado, minorado e não vazio. Do axioma do supremo tem-se a existência de supremo e infimo do conjunto A sendo $\sup A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\inf A = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Uma vez que $\sup A \notin A$ e $\inf A \notin A$ o conjunto A não tem máximo nem minimo. ■

[3] Seja $x \in \mathbb{R}$. Designa-se por módulo de x a expressão $|x|$. Por definição $|x| = x$, se $x \geq 0$ e $|x| = -x$, se $x < 0$. Se $c \in \mathbb{R}^+$ a proposição, $|x| < c$ é equivalente a $-c < x < c$.

Exerc 1.5.3. *Mostre por indução matemática que* $5^{2n} - 1$ *é divisivel por* 8*, qualquer que seja* $n \in \mathbb{N}$*.*

Resolução.
Se $n = 1$, tem-se $5^2 - 1 = 24 = 8.3$ que é divisivel por 8.
Mostre-se que se $5^{2m} - 1$ é divisivel por 8 (proposição designada por hipótese de indução) então $5^{2(m+1)} - 1$ é divisivel por 8 .

$$5^{2(m+1)} - 1 = 5^2.5^{2m} - 1 = (24+1).5^{2m} - 1 = 24.5^{2m} + 5^{2m} - 1$$

é divisivel por 8 uma vez que $24.5^{2m} = 8.3.5^{2m}$ é divisivel por 8. Ora da hipótese de indução $5^{2m} - 1$ é também divisivel por 8, sendo a soma de factores divisíveis por 8 divisivel por 8.
A proposição é assim verdadeira. ■

Exerc 1.5.4. *Mostre por indução matemática que* $\dfrac{n^3 - n + 3}{3} \in \mathbb{N}$*, qualquer que seja* $n \in \mathbb{N}$*.*

Resolução.
Seja $n = 1$, tem-se $\dfrac{1^3 - 1 + 3}{3} = 1 \in \mathbb{N}$.
Mostre-se agora que se $\dfrac{m^3 - m + 3}{3} \in \mathbb{N}$ então $\dfrac{(m+1)^3 - (m+1) + 3}{3} \in \mathbb{N}$.

$$\frac{(m+1)^3 - (m+1) + 3}{3} = \frac{m^3 - m + 3}{3} + m^2 + m \in \mathbb{N}$$

uma vez que $\dfrac{m^3 - m + 3}{3} \in \mathbb{N}$, da hipótese de indução, e $m^2 + m \in \mathbb{N}$.
A proposição é assim verdadeira .
■

Exerc 1.5.5. *Mostre por indução matemática que para todo* $n \geq 4$ *se tem*

$$n^2 > 3(n+1).$$

Resolução.
Para $n = 4$, $16 > 15$ é uma proposição verdadeira.
Mostre-se que $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ ou seja

$$m^2 > 3(m+1) \;\Rightarrow\; (m+1)^2 > 3(m+2).$$

Da hipotese de indução tem-se, $m^2 > 3(m+1)$ vindo

$$m^2 > 3(m+1) \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 > 3(m+1) + 2m + 1 \Leftrightarrow (m+1)^2 > 5m + 4$$

Ora $5m+4>3m+6$ vindo

$$(m+1)^2>5m+4>3m+6 \Rightarrow (m+1)^2>3m+6=3(m+2)$$

A proposição é assim verdadeira.
$\blacksquare$

Exerc 1.5.6. *Usando o princípio de indução matemática, mostre que*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Resolução.
Para $n=1$, $1^2 = \dfrac{(1+1)(2+1)}{6}$ é uma proposição verdadeira.
Mostre-se que $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ ou seja

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \quad \Rightarrow \sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

Da hipotese de indução tem-se,

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

adicione-se $(m+1)^2$ a ambos os membros da igualdade anterior

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 \ + \ (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2$$

tem-se

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = (m+1)\,\frac{m(2m+1)+6(m+1)}{6} = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

A proposição é assim verdadeira. $\blacksquare$

1.5.2 Enunciados de exercícios

Exerc 1.5.1. *Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *mostre que*

i)$|a-b| \geq ||a|-|b||$

ii)$|a+b| \geq ||a|-|b||$

Exerc 1.5.2. *Considere o conjunto* $A = \{x \in \mathbb{R} : \ |x-1| - x^2 + 2 < 1\}$*. Determine, caso existam, o supremo, infimo, máximo e mínimo do conjunto* A*.*

Exerc 1.5.3. *Considere o conjunto* $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x = 1/2 - 1/n, \ n \in \mathbb{N}\}$*. Determine, caso existam, o supremo, infimo, máximo e mínimo do conjunto* A*.*

Exerc 1.5.4. *Mostre por indução matemática que* $n < 2^n$*, qualquer que seja* $n \in \mathbb{N}$*.*

Exerc 1.5.5. *Mostre por indução matemática que* $n! \geq 2^{n-1}$*, qualquer que seja* $n \in \mathbb{N}$*.*

Exerc 1.5.6. *Usando o princípio de indução matemática, prove que*

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2 + 3k) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Exerc 1.5.7. *Usando o princípio de indução matemática, prove que*

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Exerc 1.5.8. *Sejam* $A \subseteq \mathbb{R}$ *majorado, não vazio e* m *um majorante de* A*. Se* $m \neq \sup A$ *mostre que existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $V_\epsilon(m) \cap A = \emptyset$*.*

Exerc 1.5.9. *Seja* $A \subseteq \mathbb{R}$ *majorado, não vazio e* $s = \sup A$*. Mostre que para qualquer* $\epsilon > 0$*, o conjunto* $V_\epsilon(s) \cap A$ *é não vazio.*

Capítulo 2

Sucessões reais

Inicia-se o capítulo introduzindo os conceitos de sucessão limitada, sucessão monótona, sucessão convergente e relacionando estes conceitos entre si. A análise da convergência de sucessões, quer em $\mathbb{R}$ quer em $\overline{\mathbb{R}}$, bem como a determinação de limites de sucessões convergentes é um dos objectivos centrais no capítulo sendo neste contexto analisadas algumas propriedades algébricas e de ordem das sucessões. Introduz-se o conceito de subsucessão e analisa-se a consequência da convergência de uma sucessão na convergência das suas subsucessões. A finalizar o capítulo introduzem-se os conceitos de sucessão de Cauchy e de sucessão contractiva.

2.1 Sucessões. Convergência de sucessões

Definição 2.1.10. *Chama-se sucessão de termos em $A \neq \emptyset$ ou sucessão em A a qualquer aplicação u de $\mathbb{N}$ em A, $u : \mathbb{N} \to A$.*

Os elementos $u(1) = u_1$, $u(2) = u_2$, ..., $u(n) = u_n$, ..., dizem-se termos da sucessão. Definir uma sucessão consiste em indicar uma forma por meio da qual se pode obter para cada $n \in \mathbb{N}$ o correspondente termo de ordem n, u_n.

Exemplo 2.1.11.

i) Sucessões definidas por recorrência.

(a) $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $u_1 = a \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = u_n.r$ (progressão geométrica de primeiro termo a e razão r).

(b) $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$
(sucessão dos números de Fibonacci).

ii) $v_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\,, \quad n \in \mathbb{N}$

As sucessões que vamos analisar neste capítulo são sucessões reais ou seja sucessões de termos em $\mathbb{R}$.
As operações algébricas que se considera no conjunto $\mathbb{R}$ estendem-se naturalmente às sucessões reais.

Definição 2.1.12. *Sejam as sucessões $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ define-se*

sucessão adição	$u + v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$	$(u + v)_n = u_n + v_n$	
sucessão subtracção	$u - v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$	$(u - v)_n = u_n - v_n$	
sucessão multiplicação	$u.v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$	$(u.v)_n = u_n.v_n$	
sucessão divisão	$u/v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$	$(u/v)_n = u_n/v_n$	$v_n \neq 0$

A relação de ordem considerada em $\mathbb{R}$ permite introduzir os conceitos de sucessão limitada e de sucessão monótona.

Definição 2.1.13. *A sucessão u_n é minorada (majorada) se e só se for minorado (majorado) como subconjunto de $\mathbb{R}$ o conjunto dos seus termos.*

Definição 2.1.14. *A sucessão u_n é limitada se e só se o conjunto dos seus termos for minorado e majorado i.e.*

$$\underset{a,b\in\mathbb{R}}{\exists} \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \ a \leq u_n \leq b \Leftrightarrow \underset{c\in\mathbb{R}^+}{\exists} \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \ |u_n| < c$$

Exemplo 2.1.15. *Tem-se para a sucessão v_n, $n \in \mathbb{N}$ do exemplo 2.1.11 ii)*

$$v_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + 1} + 1}$$

v_n é assim limitada pois $|v_n| < 1\,, \quad n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.1.16.

A adição, subtracção e multiplicação de duas sucessões limitadas é limitada;

Demonstração.
É imediado recorrendo às propriedades de números reais uma vez que

$$|u_n \pm v_n| \leq |u_n| + |v_n| \quad \text{e} \quad |u_n.v_n| \leq |u_n|.|v_n|.$$

■

Observação 2.1.17. *O quociente de duas sucessões limitadas, u_n/v_n pode não ser uma sucessão limitada (As sucessões limitadas $u_n = 1$ e $v_n = 1/n$ têm como quociente u_n/v_n uma sucessão não limitada). Uma condição suficiente para que $|u_n/v_n|$ seja limitada é $|u_n| \leq c$ e $|v_n| \geq d$, $c, d \in \mathbb{R}^+$.*

Definição 2.1.18.

A sucessão u_n é uma sucessão crescente se e só se

$$u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \ldots, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A sucessão u_n é uma sucessão decrescente se e só se

$$u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \ldots, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A sucessão u_n é estritamente crescente (decrescente) se e só se qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$ ($u_n > u_{n+1}$).

Definição 2.1.19. *Uma sucessão u_n diz-se uma sucessão monótona se for crescente ou decrescente e estritamente monótona se for estritamente crescente ou decrescente.*

Uma sucessão crescente (decrescente) é minorada (majorada), já que o primeiro termo da sucessão é um minorante (majorante) do conjunto dos seus termos.

Exemplo 2.1.20. *Seja a sucessão do exemplo 2.1.11 ii). Tem-se*

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} + 1} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} > 0$$

Concluindo-se que v_n é crescente

A noção central desta secção é a noção de convergência e de limite de uma sucessão.

Definição 2.1.21. *Uma sucessão u_n converge ou tende para $a \in \mathbb{R}$ ($u_n \to a$) se e só se*

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\quad n > p \qquad u_n \in V_\epsilon(a)$$ [1]

Assim dizer que u_n converge para a equivale a afirmar que é finito o número de inteiros positivos que verificam a condição $u_n \notin V_\epsilon(a)$ i. e. $u_n \to a$ se e só se $u_n \in V_\epsilon(a)$ para todos os valores de n com excepção de um número finito.

Exemplo 2.1.22. *Considere-se a sucessão $u_n = \frac{1}{n}$. Verifique-se que é uma sucessão convergente e que $a = 0$.*

Tem-se

$$u_n \in V_\epsilon(0) \Leftrightarrow |\frac{1}{n}| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < \frac{1}{n} < \epsilon$$

Ora basta escolher $n > 1/\epsilon$ para que $\frac{1}{n} \in V_\epsilon(0)$ concluindo-se que u_n converge para 0. Em particular se $\epsilon = 0,01$ verifica-se que se $n > 100$, $u_n \in V_\epsilon(0)$.

As sucessões que não são convergentes dizem-se *divergentes*. Mostra-se, [1], que se existir $a \in \mathbb{R}$ tal que $u_n \to a$ então a é único. Assim sendo u_n uma sucessão convergente chama-se ao número real a, *limite* da sucessão e representa-se por

$$\lim u_n.$$

Se uma sucessão u_n não tiver limite diz-se uma sucessão divergente.

Relacione-se os conceitos de sucessão convergente e de sucessão limitada.

Teorema 2.1.23. *Qualquer sucessão convergente é limitada.*

Demonstração.
Se $u_n \to a$, fixado arbitrariamente $\epsilon > 0$ existirá uma ordem p tal que para $n > p$, $u_n \in V_\epsilon(a)$.
O conjunto formado pelos termos u_n para $n > p$ é um conjunto limitado ($a + \epsilon$ é um majorante e $a - \epsilon$ é um minorante). Por outro lado o conjunto dos termos u_n para $n \leq p$ é também um conjunto limitado visto ser finito.
O conjunto de todos os termos da sucessão é a reunião de dois conjuntos limitados e qualquer reunião finita de conjuntos limitados é um conjunto limitado. ■

Há sucessões limitadas que não convergem, contudo tem-se:

[1] $V_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} :\ |x - a| < \epsilon\}$

Teorema 2.1.24. *As sucessões limitadas e monótonas são convergentes.*

Demonstração.
Seja u_n uma sucessão crescente e limitada e designe-se por U o conjunto dos seus termos.
$U \neq \emptyset$ é um conjunto limitado e consequentemente tem supremo. Designe-se esse supremo por s e mostre-se que

$$\lim u_n = s$$

Escolha-se $\epsilon > 0$. Por definição de supremo deve existir pelo menos $u_p \in U$ tal que

$$u_p > s - \epsilon.$$

Como a sucessão é crescente para $n > p$

$$u_n \geq u_p > s - \epsilon.$$

Por outro lado sendo $s = \sup U$

$$u_n \leq s.$$

Assim a partir da ordem p todos os termos $u_n \in V_\epsilon(s)$ e consequentemente $u_n \to s$.
Analogamente se demonstra a convergência quando a sucessão é decrescente tendo-se $\lim u_n = \inf U$. ■

Observação 2.1.25.

- *Uma sucessão pode ser convergente sem ser monótona. (Ex.: $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$). Apesar da sua importância as sucessões monótonas e limitadas constituem uma classe pequena de sucessões convergentes.*
- *É fundamental o axioma do supremo na demonstração do teorema 2.1.24.*

Exemplo 2.1.26. *Considere-se a sucessão limitada definida por recorrência*

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_{n+1} = x_n^2, \qquad n \geq 1.$$

Mostre-se que x_n é convergente.

Uma vez que nem todas as sucessões limitadas são convergentes, vai-se mostrar, por indução, que a sucessão é monótona. Tem-se

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{1}{4}$$

e conjectura-se que x_n é uma sucessão decrescente. Prove-se por indução que

$$x_{n+1} - x_n \leq 0, \qquad n \in \mathbb{N}$$

i)

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \leq 0$$

ii)

$$x_{m+1} - x_m \leq 0 \quad \underset{?}{\Rightarrow} \quad x_{m+2} - x_{m+1} \leq 0$$

$$x_{m+2} - x_{m+1} = x_{m+1}^2 - x_m^2 = (x_{m+1} + x_m).(x_{m+1} - x_m) \leq 0$$

já que sendo $x_m \geq 0$ se tem $x_{m+1} + x_m \geq 0$.

Conclui-se que x_n é uma sucessão decrescente e como é limitada então x_n é uma sucessão convergente.

2.2 Propriedades algébricas de sucessões. Sucessões enquadradas

A análise da convergência de sucessões mais gerais que as sucessões monótonas e limitadas pode ser feita usando alguns resultados que se vão indicar e que se podem demonstrar usando directamente a definição de limite.

Teorema 2.2.27. *Se x_n e y_n, $n \in \mathbb{N}$ são sucessões convergentes respectivamente para a e b então*

i) $x_n \pm y_n$ *é uma sucessão convergente* e $\lim (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$

ii) $x_n.y_n$ *é uma sucessão convergente* e $\lim (x_n.y_n) = \lim x_n . \lim y_n$

iii) Se $y_n \to b \neq 0$, $y_n \neq 0$ *tem-se* $\lim \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} = \frac{a}{b}$

Demonstração. *

i) Tem-se

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$$

Sendo $\epsilon > 0$ existe p_1 tal que se $n > p_1$ então $|x_n - a| \leq \epsilon/2$ e existe p_2 tal que se $n > p_2$ então $|y_n - b| \leq \epsilon/2$. Assim se $p = \max\{p_1, p_2\}$ e $n > p$ tem-se como se pretendia mostrar

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

ii) Tem-se

$$|x_n.y_n - a.b| = |(x_n.y_n - x_n.b) + (x_n.b - a.b)| \leq |x_n|.|y_n - b| + |x_n - a|.|b|$$

Ora sendo $|x_n| \leq M_1$, $n \in \mathbb{N}$ e $M = \sup\{M_1, |b|\}$ tem-se

$$|x_n.y_n - a.b| \leq M|y_n - b| + M|x_n - a|$$

o que analogamente a (i) permite estabelecer a conclusão.

iii) É analogo a (ii).

■

Observação 2.2.28. *Sejam x_n e y_n sucessões reais*

i) Se x_n e y_n são sucessões divergentes, $x_n + y_n$ pode ser convergente ou divergente.

ii) Se uma sucessão x_n é convergente e y_n é uma sucessão divergente, $x_n + y_n$ é sempre uma sucessão divergente.

Exemplo 2.2.29. *Determine-se se existir o limite da sucessão*

$$v_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + 1} + 1}$$

Por definição $\sqrt{\frac{1}{n} + 1} \to 1$. Ora $y_n = \sqrt{\frac{1}{n} + 1} + 1$ é a adição de sucessões convergentes e sendo $y_n \neq 0$ a sucessão v_n é convergente tendo-se

$$\lim v_n = \frac{1}{2}$$

Teorema 2.2.30 (Sucessões enquadradas)**.** *Sejam x_n, y_n, z_n sucessões reais e suponha-se que existe uma ordem p tal que para $n > p$*

$$x_n \leq z_n \leq y_n.$$

Supondo que x_n, y_n convergem para $a \in \mathbb{R}$ então z_n é convergente e

$$\lim z_n = a.$$

Demonstração.
Fixado arbitrariamente $\epsilon > 0$ existem p_1, p_2 tais que se $n > p_1$ então $x_n \in V_\epsilon(a)$ e se $n > p_2$ então $y_n \in V_\epsilon(a)$. Sendo $\tilde{p} = \max\{p_1, p_2, p\}$ tem-se então que se $n > \tilde{p}$

$$a - \epsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \epsilon$$

e portanto $z_n \in V_\epsilon(a)$. $\blacksquare$

Observação 2.2.31. *Se x_n e y_n não são sucessões convergentes para o mesmo limite não se pode afirmar que z_n é uma sucessão convergente. (Ex.:$-3 < (-1)^n < 7$).*

Exemplo 2.2.32. *Determine-se o limite da sucessão $z_n = \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n}$.*

Tem-se

$$-\frac{1}{n} < \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} < \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \pm\frac{1}{n} \to 0$$

Assim

$$\lim z_n = 0$$

Proposição 2.2.33. *Se a sucessão x_n é convergente e $\lim x_n = a$ então $\lim |x_n| = |a|$.*

Demonstração.
Consequência imediata de $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$ $\blacksquare$

Exemplo 2.2.34.

i) Mostre-se, recorrendo à desigualdade de Bernoulli, que se $0 < c < 1$, a sucessão $z_n = c^n$ é convergente para zero.

$(1+x)^n \geq 1+nx\,, \qquad x > -1, n \in \mathbb{N} \qquad$ *(desigualdade de Bernoulli)*

.

ii) Sendo $a \in \mathbb{R}$, determinem-se os limites das sucessões

$$u_n = \left(\frac{a}{1+|a|}\right)^n \qquad e \qquad v_n = \frac{a^n}{2^{1+2n}}.$$

i) Sendo $0 < c < 1$, tem-se
$$c = \frac{1}{1+a}$$
em que $a > 0$. Assim
$$x_n = 0 < c^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na} = y_n \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{an} \to 0$$
Do teorema das sucessões enquadradas conclui-se que $\lim z_n = 0$.

ii) Tendo presente i), tem-se
$$|c| = \left|\frac{a}{1+|a|}\right| < 1 \Rightarrow \lim \left(\frac{a}{1+|a|}\right)^n = 0.$$
Quanto à sucessão v_n, tem-se
$$v_n = \frac{1}{2}\frac{a^n}{2^{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{4}\right)^n.$$
Se $\left|\frac{a}{4}\right| < 1$, $v_n \to 0$. Se $\left|\frac{a}{4}\right| > 1$, v_n é uma sucessão não limitada e consequentemente divergente. Se $\left|\frac{a}{4}\right| = 1$, sendo $a = 4$, tem-se $v_n \to 1/2$, sendo $a = -4$, tem-se v_n divergente, mas uma sucessão limitada.

2.3 Convergência de sucessões em $\overline{\mathbb{R}}$. Cálculo de limites

Ao conjunto dos números reais pode juntar-se os elementos $+\infty$ e $-\infty$ (designados por pontos do infinito) e formar um novo conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ designado por recta acabada i.e.
$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

É natural neste conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ introduzir uma relação de ordem que restrita a $\mathbb{R}$ é a relação de ordem em $\mathbb{R}$ e que para qualquer número real x e $\pm\infty$ se tenha
$$-\infty < x < +\infty$$

Tal como no conjunto $\mathbb{R}$, introduzem-se em $\overline{\mathbb{R}}$ as operações binárias de adição e multiplicação. Em particular se $a \in \mathbb{R}$ tem-se para a operação de adição:

$$a + (+\infty) = +\infty \qquad a + (-\infty) = -\infty$$

$+\infty + (-\infty)$ é uma forma indeterminada;
e para a operação de multiplicação:
Se $a > 0$

$$a.(+\infty) = +\infty \qquad a.(-\infty) = -\infty$$

Se $a < 0$

$$a.(+\infty) = -\infty \qquad a.(-\infty) = +\infty$$

$0.(\pm\infty)$ é uma forma indeterminada

Observação 2.3.35.

- *Em $\overline{\mathbb{R}}$, generalizam-se naturalmente as noções de máximo e mínimo de um conjunto, de conjunto majorado, de conjunto limitado ($\overline{\mathbb{R}}$ tem máximo $+\infty$ e mínimo $-\infty$).*
- *Em $\overline{\mathbb{R}}$, qualquer subconjunto é limitado e tem-se*
  - *i) Se $X \neq \emptyset$ é majorado em $\mathbb{R}$ então $\sup_{\mathbb{R}} X = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} X$*
  - *ii) Se $X \neq \emptyset$ é não majorado em $\mathbb{R}$ então $\sup X = +\infty$*
  - *iii) Se $X = \emptyset$ então $\sup \emptyset = -\infty, \quad \inf \emptyset = +\infty$.*

Um dos objectivos centrais desta secção é definir a noção de sucessão real convergente em $\overline{\mathbb{R}}$. Antes de apresentar essa definição, defina-se vizinhança de $-\infty$ e de $+\infty$

$$V_\epsilon(-\infty) = [-\infty, -1/\epsilon[\qquad V_\epsilon(+\infty) =]1/\epsilon + \infty]$$

Definição 2.3.36. *A sucessão u_n converge para $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se e só se qualquer que seja $\epsilon > 0$ é finito o conjunto*

$$\{n \in \mathbb{N} : \ u_n \notin V_\epsilon(a)\}$$

Assim

- Se $a \in \mathbb{R}$ existe equivalência entre a noção de convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ e em $\mathbb{R}$.

- Se $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ tem-se

$$u_n \to +\infty \Leftrightarrow \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists} \ n > p \ : \ u_n > 1/\epsilon.$$
$$u_n \to -\infty \Leftrightarrow \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists} \ n > p \ : \ u_n < -1/\epsilon.$$

Em $\overline{\mathbb{R}}$, de imediato se conclui:

Teorema 2.3.37. *Qualquer sucessão monótona é convergente em* $\overline{\mathbb{R}}$.

Vai-se em seguida estabelecer alguns resultados que permitem determinar, em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite de sucessões reais convergentes.

Proposição 2.3.38. *Seja u_n uma sucessão de termos positivos, tal que*

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = a\,.$$

Se $a < 1$ então u_n converge e $\lim u_n = 0$

Demonstração.
Sendo $u_n > 0$, tem-se $a \geq 0$.
Seja r tal que $a < r < 1$ e defina-se $\epsilon = r - a > 0$. Existe $p \in \mathbb{N}$, tal que se $n > p$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - a\right| < \epsilon \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < a + \epsilon = a + (r - a) = r$$

Assim se $n > p$

$$0 < u_{n+1} < u_n r < u_{n-1} r^2 < \ldots < u_p r^{n+1-p}$$

Definindo $C = \dfrac{u_p}{r^p}$ tem-se para $n > p$

$$0 < u_{n+1} < C r^{n+1}$$

Ora uma vez que $0 < r < 1$ tem-se $\lim r^n = 0$ e pelo teorema das sucessões enquadradas $\lim u_n = 0$. ∎

Analogamente se demonstra a proposição seguinte:

Proposição 2.3.39. *Seja u_n uma sucessão de termos positivos, tal que*

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = a\,.$$

Se $1 < a \leq +\infty$ então u_n converge para $+\infty$.

Exemplo 2.3.40. *Determine-se o limite da sucessão* $u_n = \dfrac{3^n}{n^2}$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{3^n} = \lim 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 3\lim\frac{1}{(1+1/n)^2} = 3 > 1$$

Conclui-se que u_n é convergente para $+\infty$.

Exemplo 2.3.41. *Determinem-se, se existirem, os limites das sucessões*

$$i)\ \frac{n!}{n^n}, \qquad ii)\ \frac{c^n}{n!} \qquad iii)\ \frac{n^b}{c^n}$$

em que $b > 0$ *e* $c > 1$.

$$\text{i)}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n \to 1/e < 1$$

Conclui-se que $\dfrac{n!}{n^n}$ é convergente para 0.

$$\text{ii)}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{c^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{c^n} = \frac{c}{(n+1)} \to 0 < 1$$

Conclui-se que $\dfrac{c^n}{n!}$ é convergente para 0.

$$\text{iii)}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^b}{c^{n+1}}\frac{c^n}{n^b} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^b\frac{1}{c} \to \frac{1}{c} < 1$$

Conclui-se que $\dfrac{n^b}{c^n}$ é convergente para 0.

Pode assim estabelecer-se uma escala de sucessões

$$n^b << c^n << n! << n^n, \qquad b > 0, c > 1$$

em que $u_n << v_n$ significa que u_n é desprezável em relação a v_n, isto é que $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$

Proposição 2.3.42. *Seja* u_n *um sucessão de termos positivos. Então se* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *converge em* $\overline{\mathbb{R}}$, $\sqrt[n]{u_n}$ *também converge e para o mesmo limite.*

Demonstração. *
Seja
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$
Tem-se
$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists} \quad n > p \quad l-\epsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l+\epsilon$$
Tem-se:
$$(l-\epsilon)u_{p+1} < u_{p+2} < (l+\epsilon)u_{p+1}$$
$$(l-\epsilon)^2 u_{p+1} < u_{p+3} < (l+\epsilon)^2 u_{p+1}$$
e em geral para $n > p+1$
$$(l-\epsilon)^{n-p-1}u_{p+1} < u_n < (l+\epsilon)^{n-p-1}u_{p+1}$$
vindo
$$(l-\epsilon)(l-\epsilon)^{\frac{-(p+1)}{n}}u_{p+1}^{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{u_n} < (l+\epsilon)(l+\epsilon)^{\frac{-(p+1)}{n}}u_{p+1}^{\frac{1}{n}}$$
Pelo teorema das sucessões enquadradas, qualquer sublimite de $\sqrt[n]{u_n}$ pertence a $[l-\epsilon,\ l+\epsilon]$ uma vez que u_{p+1} é um número real fixo. Como ϵ é qualquer, o conjunto dos sublimites é singular e $\sqrt[n]{u_n}$ converge para l. ■

Exemplo 2.3.43. *Determinem-se os seguintes limites*
i) $\sqrt[n]{n}$.
ii) $\sqrt[n]{(n+1)!-n!}$

Da proposição 2.3.42 fácilmente se conclui que o limite é 1 em i), quanto a ii), seja $u_n = (n+1)! - n!$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+1)!-n!} = \lim \frac{(n+1)!(n+2-1)}{n!(n+1-1)} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)(n+1) = +\infty$$

Concluindo-se que $\sqrt[n]{u_n}$ é convergente para $+\infty$.

2.4 Subsucessões

Nesta secção vai-se definir o conceito de subsucessão começando por definir a sucessão composta de sucessões.

Definição 2.4.44. *Chama-se composta de sucessões u_n e v_n, em que $v_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, à sucessão $(u \circ v)_n$, tal que*
$$(u \circ v)_n = u_{v_n}$$
i.e. que tem por termo de ordem n, o termo de ordem v_n da sucessão u_n.

Definição 2.4.45. *w_n é subsucessão da sucessão de termos reais u_n, se e só se existir uma sucessão v_n, tal que w_n é composta de u_n com v_n e v_n é estritamente crescente*

Observação 2.4.46.

- *Qualquer subsucessão de uma sucessão limitada é limitada. Qualquer subsucessão de uma sucessão monótona é monótona.*
- *Uma sucessão não limitada pode ter subsucessões limitadas e uma sucessão não monótona tem subsucessões monótonas.*

Exemplo 2.4.47. *Definam-se subsucessões de*

$$u_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

por composição com as sucessões

i) $v_k = k + 2$

ii) $\widetilde{v}_k = 2k$

iii) $\widetilde{\widetilde{v}}_k = 2k + 1$

Têm-se as subsucessões

$$w_k = (-1)^k \frac{k+2}{k+3} \qquad \widetilde{w}_k = \frac{2k}{2k+1} \qquad \widetilde{\widetilde{w}}_k = -\frac{2k+1}{2k+2}$$

Teorema 2.4.48. *Qualquer subsucessão de uma sucessão convergente é também convergente para o mesmo limite*

Demonstração.
Seja $u_n \to a$ e $w_n = u_{v_n}$ uma subsucessão de u_n.
Sendo u_n convergente para a dado arbitrariamente $\epsilon > 0$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para $n > p$ se tem $u_n \in V_\epsilon(a)$. Ora sendo v_n uma sucessão estritamente crescente de inteiros positivos, por indução matemática, pode mostrar-se que:

$$v_n \geq n\,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

($v_1 \geq 1\,;\quad v_n \geq n \Rightarrow v_{n+1} \geq n+1$ pois $v_{n+1} > v_n$)
Conclui-se assim que se $n > p$ se tem $v_n > p$ e consequentemente

$$w_n = u_{v_n} \in V_\epsilon(a) \qquad \text{i.e.} \quad \lim w_n = a\,.$$

■

Este teorema é usado para fácilmente justificar a divergência de algumas sucessões. Em particular, se u_n admitir duas subsucessões que tenham limites diferentes, u_n é divergente.

Exemplo 2.4.49. *Analise-se a convergência da sucessão u_n do exemplo anterior*

A sucessão u_n não é convergente pois

$$w_k = (-1)^k \frac{k+2}{k+3}$$

não é convergente. Contudo são convergentes as subsucessões $\widetilde{w}_k$ e $\widetilde{\widetilde{w}}_k$ respectivamente para 1 e -1.

Exemplo 2.4.50. *Determine-se o limite da sucessão convergente*

$$x_1 = 1/2 \qquad x_{n+1} = x_n^2 \qquad n \geq 1$$

Tem-se uma vez que a sucessão x_n é convergente

$$\lim x_{n+1} = \lim x_n = l$$

vindo, tendo presente o teorema 2.4.48,

$$l = l^2 \Rightarrow l(l-1) = 0 \Rightarrow l = 0 \vee l = 1$$

Ora como $x_n \leq 1/2$ tem-se $\lim x_n \leq 1/2$ concluindo-se que

$$l = \lim x_n = 0$$

Teorema 2.4.51 (Bolzano - Weiestrass)**.** *Toda a sucessão real limitada tem pelo menos uma subsucessão convergente.*

Demonstração. *
Na demonstração deste teorema usa-se uma das importantes consequências do axioma do supremo o princípio dos intervalos encaixados[2]
A ideia central da demonstração quando o conjunto dos termos da sucessão é um conjunto infinito, consiste em partir de um intervalo que contém os termos da sucessão e, dividindo ao meio sucessivamente, obter uma sucessão de intervalos cada um dos quais tem um termo da sucessão.
Seja $X = \{x_n : \quad n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos termos da sucessão x_n.

[2]Seja $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}$ uma sucessão de intervalos limitados e fechados tais que $I_{n+1} \subset I_n$ então (i) $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n \neq \emptyset$, (ii) Se $\inf\{b_n - a_n\} = 0$, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \{c\}, \quad c \in \mathbb{R}$

- Seja X um conjunto finito.
  Há pelo menos um valor de x_n que se repete infinitas vezes. Designando esse valor por a podemos formar uma subsucessão $x_{n_k} = a$ obviamente convergente.

- Seja X um conjunto infinito.
  Sendo x_n limitada, X é limitado e consequentemente

  $$X \subset [a, b] = I_1$$

  Construa-se neste caso uma subsucessão convergente, x_{n_k}.
  Seja $x_{n_1} = x_1$. Divida-se $I = I_1$ ao meio obtendo-se dois subintervalos I_1', I_1''. Dado que X é um conjunto infinito pelo menos um dos conjuntos

  $$X_1' = \{x_n : \quad x_n \in I_1' \wedge n > n_1\}, \qquad X_1'' = \{x_n : \quad x_n \in I_1'' \wedge n > n_1\}$$

  é um conjunto infinito. Se X_1' for um conjunto infinito x_{n_2} será o primeiro elemento de X_1' senão faz-se uma escolha semelhante com X_1''.
  Seja I_2 o subintervalo associado a X_1' ou X_1''.
  Repete-se o processo dividindo I_2 ao meio e escolhe-se x_{n_3}. Obtém-se assim uma sucessão de intervalos encaixados

  $$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$$

  cujo comprimento tende para zero ($(b-a)2^{-(k-1)}$) e tal que $x_{n_k} \in I_k$.
  Pelo princípio dos intervalos encaixados

  $$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \{c\}, \quad c \in \mathbb{R}$$

  Ora atendendo a que

  $$|x_{n_k} - c| \leq (b-a)2^{-(k-1)}$$

  conclui-se que a subsucessão construida é convergente e que $x_{n_k} \to c$.

■

Definição 2.4.52. *Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é sublimite da sucessão u_n se existir uma subsucessão de u_n que convirga para a.*

Exemplo 2.4.53. *Indique-se o conjunto dos sublimites da sucessão*

$$v_n = (-1)^n .$$

Sendo S o conjunto dos sublimites tem-se $S = \{-1, 1\}$.

Teorema 2.4.54. *O número real a é sublimite da sucessão u_n se e só se qualquer que seja $\epsilon > 0$ é infinito o conjunto dos inteiros positivos n que verificam a condição $u_n \in V_\epsilon(a)$.*

Demonstração. *
• Seja $w_n = (u \circ v)_n$ uma subsucessão de u_n convergente para a i.e.

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad n > p \qquad w_n = u_{v_n} \in V_\epsilon(a).$$

Obviamente é um conjunto infinito o conjunto formado pelos inteiros positivos v_n tais que $n > p$.
• Reciprocamente suponha-se que qualquer que seja $\epsilon > 0$ é um conjunto infinito o conjunto dos inteiros positivos n tais que $u_n \in V_\epsilon(a)$.
Sendo $\epsilon = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}$ pode escolher-se $v_1 \in \mathbb{N}$ tal que $u_{v_1} \in V_{\frac{1}{2}}(a)$, $v_2 > v_1$ tal que $u_{v_2} \in V_{\frac{1}{2}}(a)$. Em geral, escolhidos $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ generalizando o processo anterior, é sempre possível escolher $v_n > v_{n-1}$ de modo que

$$u_{v_n} \in V_{\frac{1}{n}}(a)$$

Nestas condições $w_n = u_{v_n}$ será uma subsucessão de u_n convergente para a já que para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$a - \frac{1}{n} < w_n < a + \frac{1}{n}$$

■

Observação 2.4.55. *O número real a é sublimite de u_n se e só se*

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{p\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\exists} \ : \ n > p \ \ u_n \in V_\epsilon(a)$$

O número real a é limite de u_n se e só se

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \ : \ n > p \ \ u_n \in V_\epsilon(a)$$

Exemplo 2.4.56. *Usando a noção de sublimite mostre-se que para $a > 0$*

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

• Considere-se $a > 1$
Seja a sucessão $z_n = a^{\frac{1}{n}}$. Tem-se de imediato que

$$z_n > 1 \quad \text{e} \quad z_{n+1} < z_n\,.$$

A sucessão z_n é pois uma sucessão limitada e decrescente logo é convergente existindo $z = \lim z_n$.
Qualquer subsucessão tem pelo teorema 2.4.48 o mesmo limite de z_n e

$$z_{2n} = a^{\frac{1}{2n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = z_n^{\frac{1}{2}}.$$

$$\lim z_{2n} = \lim z_n^{\frac{1}{2}}$$

Assim

$$z = z^{\frac{1}{2}} \Rightarrow z^2 - z = 0 \Rightarrow z = 0 \vee z = 1$$

Como $z_n > 1$, tem-se $z = 1$.

- Considere-se $0 < a < 1$

$$\lim a^{\frac{1}{n}} = \lim 1/(1/a)^{\frac{1}{n}} \to 1/1 = 1.$$

2.5 Sucessão de Cauchy. Sucessão contractiva

Um critério de convergência importante é a noção de sucessão de Cauchy ou sucessão fundamental.

Definição 2.5.57. *A sucessão u_n é uma sucessão de Cauchy se e só se*

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{r,s\in\mathbb{N}}{\forall}\ r,s > p \quad |u_r - u_s| < \epsilon.$$

Exemplo 2.5.58. *Seja $u_n = 1 + 1/n$, tem-se $|u_r - u_s| = |1/r - 1/s| \leq 1/r + 1/s$, o que permite concluir que u_n é uma sucessão de Cauchy*

Proposição 2.5.59. *Qualquer sucessão de Cauchy é uma sucessão limitada*

Demonstração.
Seja u_n uma sucessão de Cauchy. Fixado $\epsilon > 0$ existirá $p \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer números inteiros $r, s > p$

$$|u_r - u_s| < \epsilon$$

Em particular escolhendo para s o valor fixo $p + 1$, tem-se para $r > p$

$$|u_r - u_{p+1}| < \epsilon$$

Assim para $r > p$ o conjunto dos termos u_r é limitado ($u_{p+1} - \epsilon$ é um minorante e $u_{p+1} + \epsilon$ é um majorante).
Como o conjunto dos termos u_r com $r \leq p$ é finito e portanto limitado pode concluir-se que o conjunto dos termos da sucessão, união de dois conjuntos limitados, é limitado. ■

Teorema 2.5.60. *Uma sucessão real é convergente se e só se é sucessão de Cauchy*

Demonstração. *
• Mostre-se que sendo u_n uma sucessão convergente então é uma sucessão de Cauchy.
Sendo $a = \lim u_n$

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \; \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists} \; \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \; : n > p \;\; |u_n - a| < \epsilon/2$$

Ora para $n, s > p$

$$|u_n - u_s| = |u_n - a + a - u_s| \leq |u_n - a| + |a - u_s| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Concluindo-se que a sucessão é de Cauchy.
• Mostre-se que sendo u_n uma sucessão de Cauchy é uma sucessão convergente.
Seja η sublimite de u_n que existe pois u_n é uma sucessão limitada visto ser uma sucessão de Cauchy. Mostre-se que $\lim u_n = \eta$.
Fixe-se $\epsilon > 0$. Sendo u_n uma sucessão de Cauchy pode determinar-se $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > p \quad |u_n - u_m| < \epsilon/2$$

e consequentemente

$$v_m, n > p \quad |u_n - u_{v_m}| < \epsilon/2$$

Por outro lado sendo η sublimite de u_n pode escolher-se $v_m \geq m > p$ tal que

$$|u_{v_m} - \eta| < \epsilon/2$$

Conclui-se assim que sendo $v_m \geq m > p$

$$|u_n - \eta| = |u_n - u_{v_m} + u_{v_m} - \eta| \leq |u_n - u_{v_m}| + |u_{v_m} - \eta| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

i.e. $\lim u_n = \eta$. ■

A definição de sucessão de Cauchy é muito útil para provar a convergência de sucessões para as quais não se tem candidato a limite

Exemplo 2.5.61. *Verifique-se que é divergente a sucessão*

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Para $m > n$, tem-se

$$x_m - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{m}$$

cujo o 2º termo tem $m - n$ parcelas. Então

$$x_m - x_n \geq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m} = \frac{m-n}{m}$$

Em particular para $m = 2n$ tem-se

$$x_m - x_n \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Conclui-se assim que a sucessão x_n não é sucessão de Cauchy.

A finalizar esta secção introduza-se a noção de sucessão contractiva.

Definição 2.5.62. *A sucessão x_n diz-se uma sucessão contractiva se existe $0 < c < 1$ tal que*

$$|x_{n+1} - x_n| \leq c|x_n - x_{n-1}|, \quad n > 1.$$

Proposição 2.5.63. *Se x_n é uma sucessão contractiva então é uma sucessão convergente.*

Demonstração. * Sendo x_n uma sucessão contractiva tem-se

$$|x_3 - x_2| \leq c|x_2 - x_1|$$

$$|x_4 - x_3| \leq c|x_3 - x_2| \leq c^2|x_2 - x_1|$$

Mostrando-se por indução matemática que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq c^{n-1}|x_2 - x_1|, \quad n > 1.$$

Tem-se então

$$|x_m - x_n| \leq |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \ldots + (x_{n+1} - x_n)| \leq$$

$$\leq (c^{m-2} + \ldots + c^{n-1})|x_2 - x_1| \leq c^{n-1}\frac{1 - c^{m-n}}{1-c}|x_2 - x_1|$$

i.e.

$$|x_m - x_n| \leq c^{n-1}\frac{|x_2 - x_1|}{1-c} \leq \epsilon$$

Assim a sucessão x_n é uma sucessão de Cauchy e consequentemente uma sucessão convergente. ■

Exemplo 2.5.64. *Considere-se a sucessão* u_n

$$u_1 = 1 - \frac{a}{2}\,, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1 - a}{2} \qquad 0 < a < 1,\; n > 1$$

Analise-se se a sucessão é contractiva. Se u_n *for uma sucessão convergente determine-se o seu limite.*

Tem-se

$$|u_{n+1} - u_n| = \frac{1}{2}|u_n^2 + 1 - a - u_{n-1}^2 - 1 + a| = \frac{1}{2}|u_n^2 - u_{n-1}^2| =$$

$$= \frac{1}{2}|u_n + u_{n-1}||u_n - u_{n-1}|$$

Analise-se $|u_n + u_{n-1}|$.
Tem-se $u_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$ já que
• $u_1 < 1$
• $u_m < 1 \Rightarrow u_{m+1} < 1$
De facto

$$u_m < 1 \;\Rightarrow\; u_m^2 < 1 \Rightarrow\; 1 + u_m^2 - a < 2 - a \Rightarrow u_{m+1} < 1 - \frac{a}{2} < 1$$

Assim

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \left(1 - \frac{a}{2}\right)|u_n - u_{n-1}|$$

A sucessão u_n é contractiva ($c = 1 - \dfrac{a}{2}$).
Sendo a sucessão contractiva é uma sucessão convergente. Determine-se $l = \lim u_n = \lim u_{n+1}$

$$l = \frac{1}{2}\left(l^2 + 1 - a\right) \Rightarrow l^2 - 2l + 1 - a = 0$$

$$l = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1-a)}}{2a} = 1 \pm \sqrt{a}$$

Ora como $u_n \leq 1$, conclui-se que $l = 1 - \sqrt{a}$

2.6 Exercícios

2.6.1 Exercícios resolvidos

Exerc 2.6.1. *Considere a sucessão $w_n = u_n + v_n$, $n \in \mathbb{N}$, em que*

$$u_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{3^n(2n)!}} \qquad e \qquad v_1 = 1, \qquad v_{n+1} = \frac{1}{v_n^{-1} + 2}$$

i) Determine o limite da sucessão u_n. A sucessão u_n é limitada? Justifique.

ii) Mostre que a sucessão v_n é decrescente.

iii) A sucessão v_n é uma sucessão de Cauchy? Justifique.

iv) A sucessão w_n é uma sucessão convergente? Justifique e em caso afirmativo determine o limite.

Resolução.

i)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}(2(n+1))!}}{\frac{n!}{3^n(2n)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6(2n+1)} = 0$$

A sucessão u_n é limitada uma vez que é uma sucessão convergente.

ii) Mostre-se que $v_{n+1} - v_n \leq 0$ para $n \in \mathbb{N}$, usando o princípio de indução matemática.

Se $n = 1$, $v_2 - v_1 \leq 0$ é uma proposição verdadeira.

Mostre-se que para $m \in \mathbb{N}$ $v_{m+1} - v_m \leq 0 \Rightarrow v_{m+2} - v_{m+1} \leq 0$.

Tem-se

$$v_{m+2} - v_{m+1} = \frac{1}{v_{m+1}^{-1} + 2} - \frac{1}{v_m^{-1} + 2} = \frac{v_{m+1} - v_m}{(1 + 2v_m)(1 + 2v_{m+1})}$$

Ora da hipótese de indução e uma vez que $v_m > 0$ para $m \in \mathbb{N}$ tem-se $v_{m+2} - v_{m+1} \leq 0$. Assim $v_{n+1} - v_n \leq 0$ para $n \in \mathbb{N}$, i.e. a sucessão v_n é decrescente.

iii) Uma vez que a sucessão v_n é decrescente e limitada ($0 < v_n \leq v_1$), v_n é uma sucessão convergente. Ora toda a sucessão real convergente é uma sucessão de Cauchy.

iv) A sucessão w_n é convergente, pois resulta da adição de duas sucessões convergentes e

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Seja $v = \lim v_n$. Determine-se o valor de v. Sendo v_n convergente, v_{n+1} é igualmente convergente, uma vez que é uma sua subsucessão, tendo-se $v = \dfrac{v}{1+v}$. Assim $v = 0$ concluindo-se de (i) que $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.

■

Exerc 2.6.2. *Considere a sucessão x_n, definida por*

$$x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$$

i) Mostre por indução matemática que a sucessão é crescente.

ii) A sucessão x_n é limitada superiormente. A sucessão x_n é convergente? Justifique.

Resolução.

i) Para $n = 1$, $x_2 - x_1 = \sqrt{3} - 1 \geq 0$
Para $m \in \mathbb{N}$ mostre-se que se $x_{m+1} - x_m \geq 0$ então $x_{m+2} - x_{m+1} \geq 0$.
Da definição da sucessão, tem-se

$$x_{m+2} - x_{m+1} = \sqrt{2 + x_{m+1}} - \sqrt{2 + x_m} = \frac{\overbrace{x_{m+1} - x_m}^{\text{(da hipótese de indução) } \geq 0}}{\underbrace{\sqrt{2 + x_{m+1}} + \sqrt{2 + x_m}}_{>0}} \geq 0$$

Pelo princípio de indução matemática $x_{n+1} - x_n \geq 0$, $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}$, isto é, a sucessão x_n é crescente.

ii) Da alínea anterior, como x_n é crescente é limitada inferiormente, sendo o seu primeiro termo um dos minorantes do conjunto dos seus termos. Assim x_n é uma sucessão limitada. A sucessão x_n é assim convergente pois é uma sucessão monótona e limitada.

■

Exerc 2.6.3. *Indique, se existirem, os limites das sucessões de termos gerais:*

$$u_n = \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^2+1} \qquad\qquad v_n = \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{3^n(2n)!}}$$

Justifique abreviadamente as respostas.

Resolução.

$$u_n = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2}\,\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$$

Quando, $n \to +\infty$, $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow 0$ e $1+\frac{1}{n^2} \longrightarrow 1$. Das regras operatórias com limites de sucessões, tem-se de imediato $u_n \longrightarrow 0$

$$v_n = \sqrt[n]{y_n}$$

Tem-se

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\frac{((n+1)!)^2}{3^{n+1}(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{3^n(2n)!}} = \frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2}\,\frac{3^n(2n)!}{3^{n+1}(2(n+1))!} =$$

$$= \left(\frac{(n+1)n!}{n!}\right)^2 \frac{3^n(2n)!}{3\,3^n(2n+2)(2n+1)(2n)!} = \frac{(n+1)^2}{3(2n+2)(2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{2n(1+\frac{1}{n})2n(1+\frac{1}{2n})} = \frac{1}{12}\,\frac{(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{2n})}$$

concluindo-se que:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{12}.$$

■

Exerc 2.6.4. *Considere as sucessões de termos reais*

$$a_n = \frac{2^n}{1+2^n} \qquad\qquad b_n = \frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\ldots+\frac{2^n}{1+2^n}$$

i) Determine o limite da sucessão a_n. A sucessão a_n é limitada? Justifique.

ii) A sucessão b_n é convergente? Justifique.

Resolução.

i)
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{1+2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{-n}+1} = 1$$

A sucessão a_n é uma sucessão limitada, pois toda a sucessão convergente é limitada.

ii) A sucessão $b_n = \frac{2}{3}+\frac{4}{5}+...+\frac{2^n}{1+2^n}$ é uma sucessão de termos positivos, estritamente crescente.
Tem-se
$$b_n = \frac{2}{3}+\frac{4}{5}+...+\frac{2^n}{1+2^n} \geq \frac{2}{3}+\frac{2}{3}+...+\frac{2}{3} = \frac{2}{3}n$$

Uma vez que a sucessão $\frac{2}{3}n$ não é majorada b_n também é uma sucessão não majorada.
Assim não sendo a sucessão b_n limitada é uma sucessão divergente.

■

Exerc 2.6.5. *Considere a sucessão a_n, definida por*

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}+\sqrt{a_n}$$

i) Mostre por indução matemática que a sucessão é crescente.

ii) Mostre que a sucessão a_n é contractiva.

iii) A sucessão x_n é convergente? Justifique. Determine o limite de a_n

Resolução.

i) Mostra-se que $a_{n+1} \geq a_n \qquad n \in \mathbb{N}$.

- Tem-se $a_2 = \frac{3}{2} > a_1 = 1$.
- Mostre-se que $a_{m+1} \geq a_m \;\Rightarrow\; a_{n+2} \geq a_{n+1}$.
  Tem-se
  $$a_{m+2} \geq a_{m+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\sqrt{a_{m+1}} \geq \frac{1}{2}+\sqrt{a_m} \Leftrightarrow \sqrt{a_{m+1}} \geq \sqrt{a_m} \Leftrightarrow a_{m+1} \geq a_m.$$
  Como por hipótese de indução se assume que $a_{m+1} \geq a_m$, tem-se também que $a_{m+2} \geq a_{m+1}$.

ii) a_n é uma sucessão contractiva se existe $C \in]0,1[$ tal que

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| < C|a_{n+1} - a_n|, \quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}.$$

Tem-se

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = |\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}| = \frac{|a_{n+1} - a_n|}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}} < \frac{|a_{n+1} - a_n|}{2},$$

já que a_n é crescente e $a_1 = 1$, tendo-se $\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n} > 2$, $n \in \mathbb{N}$. Conclui-se que a sucessão a_n é contractiva com $C = \frac{1}{2}$.

iii) a_n é uma sucessão convergente, já que é contractiva. Como a_{n+1} é uma subsucessão de a_n, a_{n+1} também é convergente e $\lim a_{n+1} = \lim a_n$.
Se $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$:

$$\lim a_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\lim a_n} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} + \sqrt{a}$$

$$a - \frac{1}{2} = \sqrt{a} \Rightarrow a^2 - a + \frac{1}{4} = a \Leftrightarrow a^2 - 2a + \frac{1}{4} = 0$$

vindo

$$a = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \vee a = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como a_n é uma sucessão crescente e $a_1 = 1$, tem-se $a > 1$, concluindo-se que $a = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

■

Exerc 2.6.6. *Determine se existirem os limites das seguintes sucessões em* $\overline{\mathbb{R}}$.

$$i)\quad u_n = \frac{n^p}{n!} \qquad ii)\quad v_n = \frac{(1/2)^n}{n^3} \qquad iii)\quad w_n = \frac{3^n}{n^2}$$

Resolução.

i)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)!}\frac{n!}{n^p} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \to 0 < 1 \Rightarrow u_n = \frac{n^p}{n!} \to 0$$

ii)

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)^3}\frac{n^3}{(1/2)^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \to 1/2 < 1 \Rightarrow v_n = \frac{(1/2)^n}{n^3} \to 0$$

iii)

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{3^n} = 3\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2} \to 3 > 1 \Rightarrow w_n = \frac{3^n}{n^2} \to +\infty$$

■

Exerc 2.6.7. *Determine se existirem os limites das seguintes sucessões*

i) $u_n = \dfrac{n^{80}+n!}{n^n+50n!}$ *ii)* $v_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} + \dfrac{\cos(n!\pi)}{n^2+1}$ *iii)* $w_n = \dfrac{n^n}{3^n+n!}$

Resolução.

i)

$$\frac{n^{80}+n!}{n^n+50n!} = \frac{n!}{n^n}.\frac{\dfrac{n^{80}}{n!}+1}{1+\dfrac{50n!}{n^n}} \to 0$$

já que

$$\lim \frac{n^{80}}{n!} = 0\,, \qquad \lim \frac{50n!}{n^n} = 0\,, \qquad \lim \frac{n!}{n^n} = 0$$

ii)

$$\frac{-1}{n^2+1} \le \frac{\cos(n!\pi)}{n^2+1} \le \frac{1}{n^2+1}$$

Tem-se $\dfrac{\pm 1}{n^2+1} \to 0$ vindo $\dfrac{\cos(n!\pi)}{n^2+1} \to 0$

Por outro lado

$$\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(n+1)}{2(2n+1)} \to 1/4 < 1 \Rightarrow \frac{(n!)^2}{(2n)!} \to 0$$

A sucessão v_n é convergente pois resulta da soma de duas sucessões convergentes tendo por limite 0.

iii)

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}+(n+1)!}\frac{3^n+n!}{n^n} = \frac{1+\dfrac{3^n}{n!}}{1+\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e > 1$$

vindo

$$w_n = \frac{n^n}{3^n+n!} \to +\infty$$

■

Exerc 2.6.8. *Sejam x_n, y_n sucessões convergentes. Se $x_n \leq y_n \quad n \in \mathbb{N}$ então* $\lim x_n \leq \lim y_n$

Resolução.
A demonstração reduz-se a mostrar que a sucessão convergente

$$z_n = y_n - x_n \geq 0, \; z_n \text{ tem limite e que } \qquad z = \lim z_n \geq 0.$$

Por contradição suponha-se que $z < 0$.
Sendo z_n convergente

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \; \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists} : \quad n > p \quad -\epsilon < z_n - z < \epsilon$$

Se $\epsilon = -z > 0$, da desigualdade anterior, $z_n < 0$ o que não é possível.
■

2.6.2 Enunciados de exercícios

Exerc 2.6.1. *Considere a sucessão x_n, definida por*

$$x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = \frac{1}{4}({x_n}^2 + 1)$$

i) Mostre por indução matemática que a sucessão é monótona.

ii) A sucessão x_n é convergente? Justifique.

Exerc 2.6.2. *Considere a sucessão de termos em $[0, 9]$ definida por*

$$a_1 = 1, \; a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} + 1 \qquad n \in \mathbb{N}.$$

i) Mostre por indução matemática que a_n é crescente.

ii) A sucessão é convergente? Justifique.

iii) Determine o conjunto dos sublimites da sucessão $b_n = a_n + (n!)^{-1/n}$.

Exerc 2.6.3. *Considere a sucessão x_n, definida por*

$$x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n + 3}$$

i) Mostre por indução matemática que a sucessão é monótona.

ii) A sucessão x_n é convergente? Justifique.

Exerc 2.6.4. *Considere a sucessão definida por*

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = 1 - \frac{1}{5}u_n^2 \qquad n \in \mathbb{N}.$$

i) Mostre por indução matemática que $|u_n| \leq 2 \quad , n \in \mathbb{N}$.

ii) A sucessão u_n é contractiva? Justifique.

iii) Determine o limite da sucessão convergente

$$v_n = u_n + \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

Exerc 2.6.5. *Qualquer subsucessão de uma sucessão estritamente decrescente cujo conjunto dos termos é majorado é convergente em $\mathbb{R}$? Justifique*

Exerc 2.6.6. *Considere a sucessão definida por*

$$u_1 = 3, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

i) Mostre por indução matemática que u_n com termos em $[2,3]$ é uma sucessão decrescente.

ii) A sucessão u_n é convergente? Justifique

iii) Determine o limite da sucessão convergente

$$v_n = u_n + \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}}$$

Exerc 2.6.7. *A sucessão w_n de termos positivos tal que $w_{n+1}/w_n \geq 1, \;\; n \in \mathbb{N}$ pode ter como sublimite zero? Justifique.*

Exerc 2.6.8. *Indique, se existirem, os limites das sucessões de termos gerais:*

$$a_n = \frac{3^{-n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \qquad b_n = \sqrt[n]{(n+1)^{n+1}\, 2^{-n}}$$

$$c_n = \frac{n^3}{1 + 2^{-n}} + \frac{1-e}{e^n} \qquad d_n = \frac{n^5 + n!}{(2n)!}$$

$$e_n = \frac{5^{-n}}{1-5^{-n}} \qquad r_n = \frac{n^n}{2^{2n}(n+1)!}$$

$$s_n = \frac{\sqrt[3]{n^4+1}}{1+2\sqrt{n^3+1}} \qquad t_n = \sqrt[n]{\frac{n^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}}$$

$$u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}} + (1+\frac{1}{2n})^n \qquad v_n = (\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$$

$$w_n = \frac{3^{-n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \qquad x_n = \sqrt[n]{(n+1)^{n+1}\, 2^{-n}}$$

Justifique abreviadamente as respostas.

Capítulo 3

Funções reais de variável real. Continuidade.Diferenciabilidade.

Este capítulo tem como primeiro objectivo desenvolver as bases da teoria da continuidade de funções reais de variável real. Introduzem-se os conceitos de continuidade local à Cauchy e à Heine, conceitos que se relacionam com a noção de limite. Estabelecem-se para funções contínuas em conjuntos limitados e fechados importantes propriedades, em particular introduzem-se o teorema da limitação, o teorema de Bolzano e o teorema de Weierstrass.
O segundo objectivo do capítulo é estabelecer os principais resultados da teoria da diferenciabilidade para funções reais de variável real. Define-se função derivada e relaciona-se com o conceito de função contínua. Analisa-se a derivada da função composta e a derivada da função inversa. Estabelecem-se o teorema de Rolle e o teorema de Lagrange. Estabelece-se o teorema de Cauchy analisando-se em particular a regra de Cauchy e a sua aplicação ao levantamento de indeterminações. Introduz-se o conceito de derivada de ordem superior e estabelece-se o teorema de Taylor discutindo algumas das suas aplicações, em particular, a extremos de funções. Conclui-se o capítulo com a análise de assíntotas ao gráfico de uma função.

3.1 Definição de função real de variável real

Designa-se por função real de variável real uma correspondência unívoca entre dois subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow C \subset \mathbb{R}$$

Definir uma função é indicar o conjunto D designado por domínio e uma expressão algébrica que faz corresponder a cada elemento $x \in D$ um único

$f(x) \in C$.
Se se indicar uma função sem definir explicitamente o domínio subentende-se que o domínio é o subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a expressão algébrica utilizada na definição da função designa um número real.

Exemplo 3.1.9. *Seja a função polinomial*

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad a_n \neq 0, \quad a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots, n$$

e a função racional

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}, \qquad b_m \neq 0, \quad b_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots, m$$

Estas funções não tendo explicitamente indicados os domínios têm como domínios respectivamente $\mathbb{R}$ e $\{x \in \mathbb{R} : \ b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m \neq 0\}$.

Designa-se por *contradomínio* de f o conjunto das imagens dos elementos do domínio por meio de f

$$C = \{y \in \mathbb{R} : \quad y = f(x), \quad x \in D\}$$

Exemplo 3.1.10. *Sejam as funções definidas em* $\mathbb{R}$

$$f_1(x) = x^2 \qquad e \qquad f_2(x) = \operatorname{sen} x$$

Os contradomínios destas funções são, respectivamente, $C_{f_1} = [0, +\infty[$ *e* $C_{f_2} = [-1, 1]$.

Defina-se de seguida operações algébricas entre funções.

Definição 3.1.11. *Seja* $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $g : D_g \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Em* $D_f \cap D_g \neq \emptyset$ *definem-se as funções* $f + g$, $f - g$, fg

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \qquad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

e para $x \in D_f \cap D_g$, *e tal que* $g(x) \neq 0$, *a função* f/g

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Exemplo 3.1.12. *Sendo* $f_1(x) = \sqrt{4 - x^2}$ *e* $f_2(x) = \sqrt{x - 1}$ *defina-se* $f_1 + f_2$.

Tem-se $D_{f_1} = [-2, 2]$, $D_{f_2} = [1, +\infty[$ e para $x \in D_{f_1+f_2} = [1, 2]$

$$(f_1 + f_2)(x) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{x - 1}$$

Conclui-se a secção introduzindo a noção de função composta.

Definição 3.1.13. *Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$.*
Se D_g tem um subconjunto $X \neq \emptyset$, tal que para $x \in X$ se tem $g(x) \in D_f$, define-se a função composta por

$$f \circ g : D \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad (f \circ g)(x) = f(g(x))\,,$$

em que

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \in D_g \;\wedge\; g(x) \in D_f\}$$

Exemplo 3.1.14. *Seja $f_1(x) = \sqrt{x}$ e $f_2(x) = \dfrac{9 - x^2}{x + 1}$ em que $D_{f_1} = [0, +\infty[$ e $D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq -1\}$.*

Tem-se para a função composta $f_1 \circ f_2$

$$(f_1 \circ f_2)(x) = \sqrt{\frac{9 - x^2}{x + 1}}, \qquad \text{em que} \qquad D_{f_1 \circ f_2} =]-\infty, -3] \cup]-1, 3]$$

3.2 Continuidade local à Cauchy e à Heine

Inicie-se em seguida o estudo local da continuidade

Definição 3.2.15. *A função $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua à Cauchy em $a \in D$ se e só se*

$$\underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{\epsilon>0}{\exists}\ \underset{x\in D}{\forall}\ |x - a| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta$$

Assim f é contínua à Cauchy em $a \in D$ se e só se escolhida arbitrariamente uma vizinhança de $f(a)$, $V_\delta(f(a))$, existir sempre uma vizinhança de a, $V_\epsilon(a)$, tal que para $x \in D \cap V_\epsilon(a)$ se tenha $f(x) \in V_\delta(f(a))$.
Como consequência da definição anterior f não é contínua em $a \in D$ se e só se

$$\underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{x\in D\cap|x-a|<\epsilon}{\exists}\ |f(x) - f(a)| \geq \delta$$

Exemplo 3.2.16. *Seja* $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. *Mostre que* f *é contínua em* $a \in \mathbb{R}$.

A função f é contínua em $a = 0$. De facto $|f(x) - f(0)| = \sqrt{x} < \delta$ se $0 \leq x < \delta^2$ ou seja se $x \in V_{\epsilon=\delta^2}(0) \cap [0, +\infty[$
Mostre-se que se $a \neq 0$, a função f é também contínua em a. Tem-se

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$$

Assim se $x \in [0, +\infty[$ e $|x - a| < \sqrt{a}\delta = \epsilon$ tem-se $|f(x) - f(a)| < \delta$.

Exemplo 3.2.17. *Seja*

$$D(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & se \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mostre que D *não é contínua em* $a \in \mathbb{R}$.

A função D não é contínua para nenhum $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pois existe $\delta = 1$ tal que qualquer que seja $\epsilon > 0$ existe sempre $x \in V_\epsilon(a)$ tal que

$$|D(x) - D(a)| \geq 1$$

De facto se $x \in V_\epsilon(a)$ é racional a desigualdade anterior verifica-se.
Analogamente se conclui que D não é contínua para $a \in \mathbb{Q}$.

Definição 3.2.18. *A função* $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua à Heine em* $a \in D$ *se a sucessão* $f(x_n)$ *converge para* $f(a)$ *sempre que a sucessão* x_n *de termos em* D *convirga para* a.

Exemplo 3.2.19. *Sendo a função seno contínua em* $\frac{\pi}{2}$ *é possível determinar o limite da sucessão* $\operatorname{sen}(\frac{\pi n^2}{1+2n^2})$*? Justifique.*

A sucessão $x_n = \frac{\pi n^2}{1+2n^2}$ é convergente para $\frac{\pi}{2}$. Consequentemente sendo o seno uma função contínua tem-se $\lim \operatorname{sen}(x_n) = \operatorname{sen}(\lim x_n) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Teorema 3.2.20. *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $a \in D$. *A definição de continuidade à Heine em* $a \in D$ *é equivalente à definição de continuidade à Cauchy em* $a \in D$.

Demonstração.
• Mostre-se que se f é contínua à Heine em $a \in D$ então é contínua à Cauchy em $a \in D$.
Seja f não contínua à Cauchy em a e mostre-se que existe uma sucessão $x_n \in D$ convergente para a tal que $f(x_n)$ não é convergente para $f(a)$.
Não sendo f contínua à Cauchy em a existe $\delta > 0$ tal que para todo o $\epsilon > 0$ existe $x \in D$ tal que

$$|x - a| < \epsilon \qquad \text{e} \qquad |f(x) - f(a)| \geq \delta$$

Fixado δ e considerando $\epsilon = 1/n, \;\; n \in \mathbb{N}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ escolha-se $x_n \in D$ tal que

$$|x_n - a| < 1/n \qquad \text{e} \qquad |f(x_n) - f(a)| \geq \delta$$

A sucessão x_n converge para a e $f(x_n)$ não converge para $f(a)$, i.e. a função f não é contínua à Heine em $a \in D$.
• Mostre-se agora que se f é contínua à Cauchy em $a \in D$ então é contínua à Heine em $a \in D$.
Seja $x_n \in D$ uma sucessão convergente para $a \in D$. Fixado $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que para $x \in D$ e $|x - a| < \epsilon$ se tem $|f(x) - f(a)| < \delta$. Ora como $x_n \to a$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para $n > p$, $|x_n - a| < \epsilon$ Assim como $x_n \in D$ ter-se-á também $|f(x_n) - f(a)| < \delta$, o que mostra que $f(x_n)$ é convergente para $f(a)$. ■

Demonstra-se facilmente, usando o conceito de continuidade à Heine, o seguinte resultado.

Teorema 3.2.21. *Se $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas em $a \in D$ também são funções contínuas em a as funções $f \pm g$, fg e, na hipótese de $g(a) \neq 0$, a função f/g.*

Exemplo 3.2.22. *A função constante $f_0(x) = 1$ é contínua em $a \in \mathbb{R}$.*

De facto

$$\underset{\delta>0}{\forall} \; |f_0(x) - f_0(a)| = |1 - 1| = 0 < \delta$$

Exemplo 3.2.23. *A função $f_1(x) = x$ é contínua em $a \in \mathbb{R}$.*

De facto

$$\underset{\delta>0}{\forall} \; \underset{\epsilon=\delta}{\exists} \; \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \;\; |x - a| < \epsilon \Rightarrow |f_1(x) - f_1(a)| = |x - a| < \epsilon = \delta$$

Mais geralmente do teorema 3.2.21 pode concluir-se que qualquer função polinomial $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ é contínua em $\mathbb{R}$ e que qualquer função racional $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}$ em que P_n, P_m são polinómios sem factores comuns, é contínua em $\mathbb{R} \setminus A$ em que $A = \{r_1, \ldots, r_p\}$, $p \leq m$ é o conjunto dos zeros reais do polinómio P_m.

O resultado seguinte estabelece a continuidade da função composta.

Teorema 3.2.24. *Sejam as funções f, g e $a \in \mathbb{R}$. Se a função g é contínua em a e se a função f é contínua em $b = g(a)$ então a função $f \circ g$ é contínua em a.*

Demonstração.
Seja $g : D_g \longrightarrow D_f \subset \mathbb{R}$, $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_g \subset \mathbb{R}$.
Sendo g contínua em a e f contínua em $g(a)$, tem-se qualquer que seja $x_n \in D_g$

$$x_n \longrightarrow a \Rightarrow g(x_n) \longrightarrow g(a)$$

e qualquer que seja $y_n = g(x_n) \in D_f$

$$y_n \longrightarrow g(a) \Rightarrow f(y_n) \longrightarrow f(g(a))$$

Conclui-se assim que

$$\lim(f \circ g)(x_n) = \lim f(g(x_n)) = f(g(a)) = (f \circ g)(a)$$

ou seja que $f \circ g$ é contínua em a.
■

Exemplo 3.2.25. *Analise-se a continuidade da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x) & se \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

i) Se $a = 0$ tem-se

$$|f(x) - 0| = |x||\operatorname{sen}(1/x)| \leq |x|, \quad x \neq 0$$

e basta escolher $\epsilon = \delta$ para concluir que a função f é contínua em 0

ii) Se $a \neq 0$ a função é contínua por aplicação dos teoremas 3.2.21 e 3.2.24.

3.3 Definição de limite. Limites laterais.

Vai-se introduzir a noção de limite de função $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ quando a variável independente tende para a ponto de acumulação [1] de D.

Definição 3.3.26. *Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$. Diz-se que f tem limite l quando $x \to a$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, se e só se*

$$\underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{\epsilon>0}{\exists}\ x \in D \wedge 0 < |x-a| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \delta.$$

Teorema 3.3.27. *Se f tem limite quando $x \to a$, esse limite é único.*

Demonstração. *
Considerem-se $b, b' \in \mathbb{R}$, $b \neq b'$, tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b'$. Qualquer que seja $\delta > 0$ existe então por um lado $\epsilon > 0$ tal que

$$|f(x) - b| < \delta \qquad \text{para} \quad x \in V_\epsilon(a) \cap D \setminus \{a\}\,,$$

e por outro $\epsilon' > 0$ tal que

$$|f(x) - b'| < \delta \qquad \text{para} \quad x \in V_{\epsilon'}(a) \cap D \setminus \{a\}\,.$$

Escolhendo $x_0 \in V_\epsilon(a) \cap V_{\epsilon'}(a) \cap D \setminus \{a\}$ tem-se

$$0 < |b - b'| = |b - f(x_0) + f(x_0) - b'| \leq |f(x_0) - b| + |f(x_0) - b'| < 2\delta$$

Ora a condição $0 < |b - b'| < 2\delta$ para δ um real positivo arbitrário é impossível. ■

Exemplo 3.3.28. *Seja $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Mostre-se, usando a definição de limite, que*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Tem-se

$$\underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{\epsilon=\delta}{\exists}\ 0 < |x| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - 0| = |x| < \epsilon = \delta$$

[1] a é ponto de acumulação de D se qualquer que seja $V_\epsilon(a)$, $\epsilon > 0$, existe $b \in V_\epsilon(a)$, tal que $b \in D \wedge b \neq a$. Designa-se por D', o conjunto dos pontos de acumulação do conjunto D. Se $a \in D$ não for ponto de acumulação diz-se ponto isolado de D.

Exemplo 3.3.29. *Seja* $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$*,*

$$f(x) = \begin{cases} |x| & se \quad x \neq 0 \\ \\ 1 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

Mostre-se, usando a definição de limite, que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Tem-se

$$\underset{\delta > 0}{\forall} \ \underset{\epsilon = \delta}{\exists} \ 0 < |x| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - 0| = ||x| - 0| = |x| < \epsilon = \delta$$

Facilmente se demonstra o seguinte resultado.

Teorema 3.3.30. *Seja* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$*. Então* f *tem limite* l *em* $a \in D'$ *se e só se qualquer que seja* $x_n \in D$ *e* $x_n \neq a$*, se* $x_n \to a$ *então* $f(x_n) \longrightarrow l$*.*

Exemplo 3.3.31. *Analise a existência de limite quando* $x \to 0$ *da função*

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \operatorname{sen}(1/x).$$

Considerem-se as sucessões

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0 \ \text{ e } \ x'_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi} \to 0$$

Tem-se

$$\lim g(x_n) = \lim \operatorname{sen}(n\pi) = 0, \ \text{ e } \ \lim g(x'_n) = \lim \operatorname{sen}(\pi/2 + 2n\pi) = 1$$

Assim não existe limite de g quando $x \to 0$.

Teorema 3.3.32. *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $a \in D$ *um ponto não isolado de* D*. Então* f *é contínua em* $a \in D' \cap D$ *se e só se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\,.$$

Demonstração.

• Seja f contínua em a

$$\underset{\delta > 0}{\forall} \ \underset{\epsilon > 0}{\exists} \ x \in D \wedge |x - a| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta$$

Então obviamente $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
• Seja $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$$\underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{\epsilon>0}{\exists}\ x \in D \wedge 0 < |x-a| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta$$

Uma vez que $f(x)|_{x=a} - f(a) = 0$ pode eliminar-se a condição $|x-a| > 0$ e concluir-se que a função f é contínua em a.
■

Facilmente se estabelece uma condição necessária e suficiente para a existência de limite quando em vez de $a \in D' \cap D$ se tem $a \in D'$.

Teorema 3.3.33. *Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in D'_f$. É condição necessária e suficiente para que exista*

$$\lim_{x\to a} f(x)\,.$$

que exista uma função F tal que

- $D_F = D_f \cup \{a\}$
- $F(x) = f(x)$, $x \in D_f$
- F *é contínua em* a.

Quando existe o limite anterior existe uma função F nas condições indicadas sendo

$$F(a) = \lim_{x\to a} f(x)\,.$$

A função $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *prolongável por continuidade* a $a \in D'_f$ se e só se tiver limite finito nesse ponto.
A função $F : D_f \cup \{a\} \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in D_f \\ \\ \lim_{x\to a} f(x) & \text{se} \quad x = a. \end{cases}$$

é designada por prolongamento por continuidade a $a \in D'_f$ da função f.

Introduza-se as noções de limites laterais à direita e à esquerda.

Definição 3.3.34. *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D'$ *e, sendo* $D_d = D \cap]a, +\infty[$, $D_e = D \cap] - \infty, a[$,

$$f_d = f|_{D_d} \qquad f_e = f|_{D_e}$$

Por definição designa-se por limite lateral à direita em a

$$\lim_{x\to a} f_d(x) = f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

e por limite lateral à esquerda em a

$$\lim_{x\to a} f_e(x) = f(a^-) = \lim_{x\to a^-} f(x)\,.$$

Facilmente se conclui que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe se e só se existem $f(a^+), f(a^-)$ e $f(a^+) = f(a^-)$.

Exemplo 3.3.35. *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se} \quad |x| \le 1 \\ \\ 1 - x^2 & \text{se} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Determine-se $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ *e* $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

A função f é uma função contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ pois é polinomial. Tem-se

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (1 - x^2) = 0 = \lim_{x\to 1^-} (x^2 - 1) = 0 = f(1),$$

sendo a função f contínua em 1.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2 - 1) = 0 = \lim_{x\to -1^-} - (1 - x^2) = 0 = f(-1),$$

sendo a função f contínua em -1.

Relacione-se a propriedade de monotonia de uma função com a existência de limites laterais.

Definição 3.3.36. *Seja* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.
A função f *é uma função crescente se quaisquer que sejam* $x_1, x_2 \in D$,

$$x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$

A função f *é uma função decrescente se quaisquer que sejam* $x_1, x_2 \in D$,

$$x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

A função f *é monótona se é uma função crescente ou decrescente.*

Teorema 3.3.37. *Se a função f é monótona em $I =]a, b[$, em qualquer ponto interior de I, $c \in I$, existem os limites laterais $f(c^+)$ e $f(c^-)$ i.e. as descontinuidades da função f são de primeira espécie.*

Demonstração.
Seja f crescente em I. Mostre-se que para $c \in int\, I$ existe $f(c^-)$.
A função f é majorada em $]a, c[$ por $f(c)$, existe assim supremo

$$s = \sup_{x \in]a,c[} f(x) \leq f(c)$$

Da definição de supremo tem-se

- $f(x) \leq s, \quad \underset{x \in]a,c[}{\forall}$
- $\underset{\delta > 0}{\forall} \; \underset{\alpha \in]a,c[}{\exists} : f(\alpha) > s - \delta,$

Ora como f é crescente em I

$$f(x) > f(\alpha) > s - \delta, \qquad\qquad \underset{x \in]\alpha,c[}{\forall}$$

Assim para $\alpha < x < c$

$$\underset{\delta > 0}{\forall} \; s - \delta < f(x) \leq s \Leftrightarrow f(c^-) = s = \sup_{x \in]a,c[} f(x)$$

Analogamente se mostra que existe

$$f(c^+) = t = \inf_{x \in]c,b[} f(x)\,.$$

■

Observação 3.3.38. *Sendo a função f crescente em $]a, b[$, f é uma função majorada em $]a, c[$ e minorada em $]c, b[$ tendo-se $f(c^-) \leq f(c) \leq f(c^+)$.*

Mesmo quando a e b não pertencem a $\mathbb{R}$ pode definir-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

generalizando a noção anterior de limite. Em particular:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se e só se

$$\underset{\delta > 0}{\forall} \; \underset{\epsilon > 0}{\exists} \; \underset{x \in D}{\forall} x > 1/\epsilon \Rightarrow f(x) < -1/\delta$$

- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ se e só se

$$\underset{k > 0}{\forall} \; \underset{\epsilon > 0}{\exists} \; \underset{x \in D}{\forall} a < x < a + \epsilon \Rightarrow f(x) > k\,.$$

3.4 Funções contínuas em intervalos.

Definição 3.4.39. *Seja $f : A \subset D \longrightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que f é contínua em A se e só se f é contínua para qualquer $a \in A$.*

A função f é contínua em $A \subset D \subset \mathbb{R}$ se e só se $f|_A$ for contínua. As funções que são contínuas em conjuntos limitados e fechados [2] têm propriedades especiais.

Antes de enunciar o teorema da limitação de f, recorde-se a noção de função limitada em $A \subset D$.

Definição 3.4.40. *A função $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada em $A \subset D$ se existir $M \in \mathbb{R}^+$ tal que qualquer que seja $x \in A$*

$$|f(x)| \leq M$$

i.e se é limitado o conjunto

$$f(A) = \{f(x) \ : \ x \in A\} .$$

Teorema 3.4.41 (Teorema da limitação de f)**.** *Seja $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado e fechado e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua em I então f é uma função limitada em I.*

Demonstração.
Suponha-se que a função f não é limitada. Então para qualquer $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in I$ tal que

$$|f(x_n)| > n$$

Mas sendo x_n uma sucessão limitada uma vez que I é um intervalo limitado tem uma subsucessão convergente x_{n_k}, o que, atendendo a que I é fechado conduz a que $x_{n_k} \longrightarrow x \in I$.
Ora f é contínua em x vindo $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x)$. Assim $f(x_{n_k})$ é uma sucessão limitada o que contraria

$$|f(x_{n_k})| > n_k .$$

■

Em seguida considere-se o teorema do valor intermédio que traduz de forma abreviada mas pouco precisa, que uma função contínua num intervalo limitado e fechado não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios.

[2] $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto fechado se e só se qualquer sucessão de termos em A convergente, converge para um elementos de A. Sendo A um conjunto fechado limitado e não vazio, o $\sup A$ e o $\inf A$ pertencem ao conjunto.

Teorema 3.4.42 (Teorema de Bolzano ou teorema do valor intermédio). *Seja*

- $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *um intervalo limitado e fechado.*
- $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, *uma função contínua em* I.
- $f(a) \neq f(b)$.

Então qualquer que seja k *estritamente compreendido entre* $f(a)$ *e* $f(b)$ *existe* $c \in]a, b[$ *tal que*

$$f(c) = k.$$

Demonstração. *

Vai-se supor que $f(a) \leq k \leq f(b)$. Divida-se o intervalo $[a, b]$ a meio. Para um dos dois intervalos obtidos por exemplo $[a_1, b_1]$ tem-se $f(a_1) \leq k \leq f(b_1)$. Fazendo a divisão a meio deste intervalo obtém-se um segundo intervalo $[a_2, b_2]$ satisfazendo $f(a_2) \leq k \leq f(b_2)$. Repetindo sucessivamente este processo obtém-se uma sucessão de intervalos

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

tal que, para qualquer n, se tem

$$f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$$

Pelo princípio dos intervalos encaixados [3] existe um ponto c comum a todos os intervalos tal que

$$c = \lim\ a_n = \lim\ b_n$$

Ora sendo a função f contínua em c tem-se precisamente

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = k$$

Se $f(a) \geq k \geq f(b)$ a demonstração reduz-se à anterior substituindo $f(x)$ por $-f(x)$.

■

Consequência imediata do terorema de Bolzano são os corolários seguintes

Corolário 3.4.43. *Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua que não se anula em* $I = [a, b]$. *Então os valores de* $f(x)$ *qualquer que seja* $x \in I$ *têm o mesmo sinal.*

[3] Seja $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R},\ \ n \in \mathbb{N}$ uma sucessão de intervalos limitados e fechados tais que $I_{n+1} \subset I_n$ então (i) $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} I_n \neq \emptyset$, (ii) Se $\inf\{b_n - a_n\} = 0$, $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} I_n = \{c\}, \quad c \in \mathbb{R}$.

Corolário 3.4.44. *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $I = [a, b]$. Se $f(a).f(b) < 0$ a equação*

$$f(x) = 0$$

tem pelo menos uma solução em $]a, b[$.

Exemplo 3.4.45. *Sendo $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função contínua mostre que existe um ponto fixo de f (existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$).*

Seja $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$ uma função contínua em $[0, 1] = I$. Demonstre-se por absurdo a existência de ponto fixo.
Se $g(x) \neq 0$, $x \in I$, pelo teorema de Bolzano $g(x) > 0$ ou $g(x) < 0$. Ora atendendo a que

$$g(1) = f(1) - 1 \leq 0, \qquad\qquad g(0) = f(0) \geq 0$$

conclui-se que existe $x \in I$ tal que $g(x) = 0$.

Definição 3.4.46. *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$*
- *f tem máximo em I se existir $x_M \in I$ tal que*

$$f(x) \leq f(x_M)\,, \qquad x \in I$$

- *f tem minimo em I se existir $x_m \in I$ tal que*

$$f(x) \geq f(x_m)\,, \qquad x \in I\,.$$

Teorema 3.4.47 (Teorema de Weierstrass)**.** *Seja $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado e fechado e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua em I. Então f tem máximo e mínimo em I.*

Demonstração.
Sendo $f(I)$ é um conjunto limitado tem supremo e infimo em $\mathbb{R}$ e se $\sup f(I)$ e $\inf f(I)$ pertencem ao conjunto $f(I)$ são o valor, respectivamente, máximo e mínimo da função.
Se $f(I)$ é um conjunto fechado tem-se que $\sup f(I)$, $\inf f(I) \in f(I)$. Mostre-se que $f(I)$ é um conjunto fechado. Sendo $y_n \in f(I)$ uma sucessão convergente, mostre-se que $\lim y_n \in f(I)$.
Seja a sucessão $y_n = f(x_n)$ em que x_n é uma sucessão limitada já que $x_n \in I$. A sucessão x_n tem uma subsucessão convergente x_{n_k} tal que $x_{n_k} \to x \in I$ pois I é fechado.
Por outro lado como f é uma função contínua

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(I).$$

Sendo y_{n_k} uma subsucessão de y_n tem-se assim que $y_n \to y \in f(I)$ concluindo-se que $f(I)$ é um conjunto fechado. $\blacksquare$

Exemplo 3.4.48. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$

$$\max\ f([-1,1]) = 1 \qquad\qquad \min\ f([-1,1]) = 0$$

Quando não é satisfeita alguma das hipóteses do teorema de Weierstrass pode não existir máximo ou mínimo.

Exemplo 3.4.49. *Seja* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} 1/x & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

Tem-se que g é contínua em $]0, 1] = I$, mas em I tem mínimo, mas não tem máximo, nem sequer supremo.

Exemplo 3.4.50. *Seja* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

A função h tem máximo, mas não tem mínimo.

Evidentemente uma função pode ter máximo e mínimo num determinado conjunto sem que sejam verificadas as condições do teorema de Weierstrass. As condições são suficientes, mas nenhuma delas é necessária. Por exemplo, a função de Dirichlet,

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

é uma função com máximo e mínimo em qualquer subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$.

Teorema 3.4.51. *Seja* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo limitado e fechado e* $f : I \to \mathbb{R}$, *uma função contínua em* I *então* $f(I)$ *é um intervalo limitado e fechado.*

Demonstração.
Se $f(I)$ é limitado então existem $\sup f(I)$ e $\inf f(I)$ e sendo $f(I)$ fechado, $\sup f(I), \inf f(I) \in f(I)$.
Sejam $M = \sup f(I)$ e $m = \inf f(I)$. Tem-se naturalmente que $f(I) \subset [m, M]$. Pretende-se mostrar que $f(I) = [m, M]$.
Sejam $m = f(x_m)$ e $M = f(x_M)$. Do teorema de Bolzano tem-se que que f assume todos os valores entre $f(x_m)$ e $f(x_M)$ assim $f(I) = [m, M]$. $\blacksquare$

Observação 3.4.52. *A propriedade anterior não é exclusiva das funções contínuas. Sem ser contínua,* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) & se \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

transforma um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ *num intervalo.*

Observação 3.4.53. *Em geral* $f(I) \neq [f(a), f(b)]$. *Seja* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. *Tem-se*

$$f(I) = [0, 1] \qquad e \qquad f(-1) = f(1) = 1\,.$$

Exemplo 3.4.54. *Seja* $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$*, uma função contínua positiva. Mostre que existe* $\alpha > 0$ *tal que*

$$g(x) \geq \alpha, \qquad x \in I = [0, 1]$$

Pelo teorema 3.4.51, $g(I) = [\alpha, \beta]$. Mostre-se que $\alpha > 0$.
Admita-se que $\alpha = 0$. Então existe $c \in [0, 1]$ tal que

$$g(c) = \alpha = 0$$

o que não é possível pois $g(x) > 0$, $x \in [0, 1]$.

Teorema 3.4.55. *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função monótona em* $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. *Se* f *transforma o intervalo* I *no intervalo* $f(I)$ *então* f *é contínua em* I.

Demonstração.
Seja f crescente em I e admita-se que em $c \in I$ a função f não é contínua. Tem-se

$$f(c^-) \neq f(c) \Rightarrow f(c^-) < f(c)$$

ou

$$f(c) \neq f(c^+) \Rightarrow f(c) < f(c^+)$$

O facto de f ser crescente leva a que f não possa assumir um valor entre $f(c^-)$ e $f(c)$ na primeira hipótese, ou entre $f(c)$ e $f(c^+)$ na segunda hipótese. Assim se f não é contínua $f(I)$ não é um intervalo o que contraria a hipótese.
■

3.5 Continuidade da função inversa.

Comece-se por relacionar a monotonia com a injectividade de funções reais. Se f é estritamente monótona, evidentemente que é injectiva. Pode mostrar-se também facilmente como consequência do teorema de Bolzano que:

Proposição 3.5.56. *Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e injectiva em $[a, b]$ então f é estritamente monótona em $[a, b]$.*

Introduza-se de seguida a definição de função inversa.

Definição 3.5.57. *Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função injectiva.*
Diz-se que a função f tem inversa se existe uma função $g : f(A) \longrightarrow A$ tal que

$$g(f(x)) = x, \qquad x \in A$$
$$f(g(y)) = y, \qquad y \in f(A)$$

Observação 3.5.58. *Os pontos do gráfico de g obtêm-se dos pontos do gráfico de f simplesmente trocando as coordenadas. O gráfico de g resulta de refletir o gráfico de f na recta $y = x$.*

Exemplo 3.5.59. *Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$. A função f tem inversa, sendo a função $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $g(y) = \sqrt{y}$ a inversa de f.*

Passando à continuidade da função inversa tem-se

Teorema 3.5.60. *Seja $I = [a, b]$ um intervalo limitado e fechado e a função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função estritamente monótona e contínua em I. Então existe a função inversa da função f que é estritamente monótona e contínua em $f(I)$.*

Demonstração.
Seja f estritamente crescente. Consequentemente f é injectiva e existe $g : J \longrightarrow I$ tal que $f(g(y)) = y$, $y \in J = f(I)$.
Verifique-se que g é estritamente crescente.
Seja $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$. Admita-se que $x_1 \geq x_2$. Então

$$f(x_1) \geq f(x_2) \Leftrightarrow y_1 \geq y_2$$

o que não é possível vindo

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(y_1) = g(f(x_1)) < g(y_2) = g(f(x_2)).$$

Quanto à análise da continuidade da função inversa tem-se que a função g transforma o intervalo $f(I)$ em I. Ora se g é uma função monótona em I e se $g(I)$ é um intervalo conclui-se que a função g é contínua.

∎

Exemplo 3.5.61.
A função arco-seno é a inversa da função seno, restrita a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *ou seja tem-se*

$$x \in [-\pi/2, \pi/2] \wedge \operatorname{sen} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{arcsen} y$$

A função arco-coseno é a inversa da função coseno restrita a $[0, \pi]$ *ou seja tem-se*

$$x \in [0, \pi] \wedge \cos x = y \Leftrightarrow x = \arccos y$$

3.6 Diferenciabilidade. Função derivada

Definição 3.6.1. *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $a \in int\, D$ [4]*.*
Designa-se razão incremental da função f *no ponto* a

$$g : D \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Definição 3.6.2. *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $a \in intD$*.*
A função f *tem derivada em* a *se a razão incremental da função* f *tem limite em* $\overline{\mathbb{R}}$ *quando* $x \to a$*. Tendo-se*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

A função f *diz-se diferenciável em* a *se a derivada da função* f *em* a *é um número real.*

Note-se que sendo $x = a + h$ se tem também

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Observação 3.6.3.
• *Quando* $f'(a)$ *existe e é real existe tangente ao gráfico de* f *no ponto* $(a, f(a))$*, a recta que passa nesse ponto e tem declive* $f'(a)$*:*

$$y = f(a) + (x - a)f'(a)$$

[4] $int\, D$ representa o conjunto dos pontos interiores de D. Um ponto $a \in D$ é ponto interior de D se existe $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(a) \subset D$.

• *Quando* $f'(a) = \pm\infty$ *a tangente ao gráfico de* f *é a recta vertical de equação* $x = a$.
• *Quando para* $x \to a$ *e a razão incremental de* f *não tem limite diz-se que o gráfico de* f *não tem tangente em* $(a, f(a))$.

Exemplo 3.6.4.
i) Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{sen}(x)$. *Determine a equação da recta tangente ao gráfico de* g *em* $(0, 0)$.

ii) Seja $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$. *Existe tangente ao gráfico de* h *em* $(0, 0)$*? Justifique.*

iii) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. *Existe derivada em* $x = 0$*? Justifique.*

i) Tem-se
$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$
sendo $y = x$ a tangente ao gráfico de g em $(0, 0)$.

ii) Em $x = 0$, $h'(0) = +\infty$ e o gráfico da função h tem tangente vertical de equação $x = 0$.

iii) Tem-se $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1$. Assim não existe em $\mathbb{R}$ o limite da razão incremental $\dfrac{|x| - 0}{x - 0}$ e consequentemente não existe derivada em $x = 0$.

Este último exemplo sugere a noção de derivada lateral.

Definição 3.6.5. *Define-se derivada lateral à direita/esquerda, respectivamente, por*
$$f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad e \qquad f'_e(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

A função f tem derivada em a se e só se existem as derivadas laterais de f em a com o mesmo valor.

Exemplo 3.6.6. *Considerando a função* f *do exemplo anterior, tem-se* $f'_d(0) = 1$, $f'_e(0) = -1$

Uma função pode ser contínua num ponto onde não existe derivada. A continuidade nem sequer garante a existência de derivadas laterais.

Exemplo 3.6.7. *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x}) & se \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

Quando $x \to 0$ não existe limite para a função f, nem sequer limites laterais pois

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \mathrm{sen}(\frac{1}{x})$$

O exemplo que se apresenta de seguida, ilustra que a existência de derivada infinita não garante a continuidade.

Exemplo 3.6.8. *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & se \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

Tem-se:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty$$

vindo $f'(0) = +\infty$. A função contudo é descontínua em $x = 0$.

Relacione-se a noção de continuidade e a de diferenciabilidade.

Teorema 3.6.9. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in intD$.*
Se a função f é diferenciável em a então a função f é contínua em a.

Demonstração.
Seja g a razão incremental de f em a. Tem-se para $x \in D \setminus \{a\}$

$$f(x) = f(a) + (x - a)g(x)$$

vindo

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (f(a) + (x - a)g(x)) = f(a) + 0.f'(a)$$

Assim $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. ■

Definição 3.6.10 (Função derivada de f). *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $D_1 \subset D$ o conjunto dos os pontos interiores a D em que f é diferenciável. Em D_1 define-se a função que em $x \in D_1$ tem por valor $f'(x)$ designada por função derivada*

$$f' : D_1 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad x \longrightarrow f'(x)$$

A função $f : D_1 \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $D_1 \subset D$ se e só se for diferenciável em qualquer $x \in D_1$. A função f é uma função diferenciável em D_1 se e só se $f|_{D_1}$ é uma função diferenciável.

Teorema 3.6.11. *Se f, g são funções diferenciáveis em a, as funções $f \pm g$, $f.g$ e f/g são diferenciáveis em a e*

i) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

iii) $(f/g)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$*, onde* $g(a) \neq 0$.

Demonstração.

i)

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} =$$

$$= f'(a) + g'(a)$$

ii) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h) - f(a+h)g(a) + f(a+h)g(a) - f(a)g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(a+h)\frac{g(a+h)-g(a)}{h} + g(a)\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$= f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$$

já que se f é diferenciável em a então f é contínua em a sendo $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$.

iii) Facilmente se conclui de (ii), uma vez que $f/g = f.1/g$.

■

3.7 Derivada da função composta. Derivada da função inversa

Teorema 3.7.12 (Derivação da função composta)**.** *Sejam I, J intervalos abertos, e as funções f, g tais que*

- $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $f(I) \subset J$,
- f *diferenciável em* a *e* g *é diferenciável em* $f(a)$.

Então a função composta $g \circ f$ *é diferenciável em* a *e*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Demonstração. *
Sendo f uma função diferenciável em a e g uma função diferenciável em $b \in f(I)$, para $a \in I$ e $h \in \mathbb{R}$ tal que $a + h \in I$ considere-se [5]

$$f(a+h) - f(a) = h(f'(a) + \alpha(h))$$

e para $b \in f(I)$ e $k \in \mathbb{R}$ tal que $b + k \in f(I)$

$$g(b+k) - g(b) = k(g'(b) + \beta(k))$$

em que

$$\lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{k \to 0} \beta(k) = 0\,.$$

Sendo $b = f(a)$ e $k = f(a+h) - f(a)$ tem-se

$$g(f(a+h)) - g(f(a)) = (f(a+h) - f(a))(g'(f(a)) + \beta(f(a+h) - f(a)))$$

vindo para $\varphi = g \circ f$ e $h \neq 0$

$$\frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} = (f'(a) + \alpha(h))(g'(f(a)) + \beta(f(a+h) - f(a))$$

---

[5]

Lema 3.7.13. *[2] Se f é diferenciável em x_0 então*

$$f(x) = f(x_0) + (f'(x_0) + \theta(x))\,(x - x_0)$$

em que θ é uma função definida numa vizinhança de x_0 tal que

$$\lim_{x \to x_0} \theta(x) = \theta(x_0) = 0$$

Assim uma vez que $\lim_{h\to 0}\alpha(h)) = 0$ e $\lim_{h\to 0}\beta(f(a+h)-f(a)) = 0$, tem-se

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h} = f'(a)g'(f(a)).$$

■

Exemplo 3.7.14. *Determine os conjuntos em que são diferenciáveis as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*
i) $\qquad f(x) = x|x|$
ii)

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

i) A função f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}^-$ pois

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x > 0 \\ -x^2 & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

A função f é pois uma função diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Tem-se

$$f'(x) = 2|x|\,, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Por outro lado para $x = 0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = |x| \Rightarrow \lim_{x\to 0}|x| = 0$$

Assim a função f é diferenciável com derivada contínua em $\mathbb{R}$.

ii) Para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a função $x \to \operatorname{sen} x$ e a função $x \to 1/x$ são diferenciáveis em todo o seu domínio e portanto a função definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por $x \to \operatorname{sen}(1/x)$ é diferenciável no seu domínio com derivada

$$-1/x^2 \cos(1/x)$$

A função g em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é pois diferenciável com derivada

$$g'(x) = -\cos(1/x) + 2x \operatorname{sen}(1/x).$$

Por outro lado para $x = 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}(1/x) = 0$$

concluindo-se que a função g é diferenciável em zero sendo $g'(0) = 0$ Finalmente g é diferenciável em $\mathbb{R}$ com derivada

$$g'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Note-se que a função g' não tem limite quando $x \to 0$ sendo descontínua em 0.

Teorema 3.7.15. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona e contínua em I, diferenciável em $c \in \mathbb{R}$ com $f'(c) \neq 0$. Então a inversa de f, g, é diferenciável em $d = f(c)$. Sendo*

$$g'(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(g(d))}.$$

Demonstração.
Seja $H(y)$ a razão incremental correspondente a $g(y)$

$$H(y) = \frac{g(y) - g(d)}{y - d}.$$

Sendo g estritamente monótona então $g(y) \neq g(d)$ se $y \neq d$.
Considere-se

$$H_1(y) = \frac{y - d}{g(y) - g(d)}.$$

Existe

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

pois f é diferenciável em c. Ora, como $x = g(y)$ e $c = g(d)$,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{f(g(y)) - f(g(d))}{g(y) - g(d)} = \frac{y - d}{g(y) - g(d)} = H_1(y)$$

Quando $x \to c$ uma vez que a função g é contínua, $y \to d$, assim

$$\lim_{y \to d} H_1(y) = f'(c)$$

i.e.
$$\lim_{y\to d} H(y) = \lim_{y\to d} \frac{1}{H_1(y)} = \frac{1}{f'(c)}.$$
■

Exemplo 3.7.16. *Considere a função injectiva* $f :]-\frac{2}{\pi}, \frac{1}{2}[\to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \arccos(-2x) & se \quad 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ 0 & se \quad x = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} x \, \mathrm{e}^{\dfrac{x\pi}{2}} & se \quad \dfrac{-2}{\pi} < x < 0. \end{cases}$$

Calcule a derivada da função inversa em zero.

Vai-se aplicar o teorema 3.7.15 e em particular a fórmula
$$\left(f^{-1}\right)'(d) = \frac{1}{f'(c)} \qquad \text{se} \quad f'(c) \neq 0$$
em que $d = 0 = f(c)$. Conclui-se neste caso de imediato que $c = 0$. Determine-se assim $f'(0)$. Tem-se
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\pi/2 . x \, \mathrm{e}^{x\pi/2} - 0}{x - 0} = \pi/2$$
e
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x \arccos(-2x) - 0}{x - 0} = \pi/2$$
concluindo-se que $f'(0) = \pi/2 \neq 0$.
Finalmente tem-se:
$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{\pi/2} = 2/\pi \, .$$

Exemplo 3.7.17. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|$. *Calcule a derivada da função inversa.*

A função f é estritamente monótona e contínua, diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}^-$ com derivada não nula.
Se $x > 0$, de $y = f(x) = x^2$ tem-se $g_1(y) = x = \sqrt{y}$, e se $x < 0$ de

$y = f(x) = -x^2$ tem-se $g_2(y) = x = -\sqrt{-y}$
A derivada da função inversa da função f é assim, para $x > 0$,

$$g_1'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\sqrt{y})} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

e para para $x < 0$,

$$g_2'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(-\sqrt{-y})} = \frac{1}{2\sqrt{-y}}$$

Por outro lado sendo

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|x}{x} = 0$$

para g_1, g_2 tem-se, respectivamente, à esquerda e à direita de zero

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\sqrt{y}-0}{y} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{y\to 0^-} \frac{-\sqrt{-y}-0}{y} = +\infty$$

3.8 Extremos relativos. Teorema de Lagrange.

Definição 3.8.18. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.*
Diz-se que f tem um máximo relativo ou mínimo relativo em $c \in D$ se existe respectivamente uma vizinhança ϵ de c, $V_\epsilon(c)$, tal que

$$f(x) \leq f(c)\,, \qquad x \in V_\epsilon(c) \cap D$$

ou

$$f(x) \geq f(c)\,, \qquad x \in V_\epsilon(c) \cap D$$

Diz-se que f tem um extremo relativo em c, se tem um máximo ou um mínimo relativo em c.

Quando uma função tem máximo em todo o seu domínio esse máximo é também um máximo relativo. Sendo $f(c)$ o máximo em D de $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ter-se-á, qualquer que seja $\epsilon > 0$, $f(x) \leq f(c)$, $x \in V_\epsilon(c) \cap D$. A reciproca não é evidentemente verdadeira.

Exemplo 3.8.19. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Averigue se a função f tem extremos.*

A função tem um mínimo absoluto em $x = 0$, uma vez que

$$f(x) \geq f(0) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

Teorema 3.8.20 (Extremo interior)**.** *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $c \in \operatorname{int} I$. Se f tem um extremo relativo em c e se f é uma função diferenciável em c então*
$$f'(c) = 0$$

Demonstração.
Suponha-se que f tem minimo relativo em c. Existe então $\epsilon > 0$ tal que a diferença $f(x) - f(c)$ é maior ou igual a zero no conjunto $V_\epsilon(c) \cap D$.
Nesse conjunto tem-se assim

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0\,, \qquad \text{se} \qquad x > c$$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0\,, \qquad \text{se} \qquad x < c$$

Existindo $f'(c)$ existem também com o mesmo valor $f'_e(c)$ e $f'_d(c)$. Ora das desigualdades anteriores tem-se

$$f'_d(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0\,, \qquad \text{se} \qquad x > c$$

$$f'_e(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0\,, \qquad \text{se} \qquad x < c$$

Vindo da diferenciabilidade de f em c que $f'_e(c) = f'_d(c) = f'(c) = 0$.
Analogamente se demonstrava se f tivesse um máximo relativo em c. ∎

Exemplo 3.8.21. *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x(x^2 - 1)$ uma função com extremos relativos. Determine os possíveis valores do domínio de g que são extremos relativos.*

A função derivada de g é $g'(x) = 3x^2 - 1$. A função g tem em $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ possíveis extremos relativos.

Observação 3.8.22. *A reciproca do teorema 3.8.20 é falsa.*

Exemplo 3.8.23. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. A função $f'(x) = 3x^2$ é a sua função derivada. Tem-se $f'(0) = 0$, contudo $f(0)$ não é extremo relativo de f.*

Observação 3.8.24. *Podem existir extremos locais em pontos onde a função não é diferenciável.*

Exemplo 3.8.25. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & se \quad x \geq 0 \\ \\ 1 + x & se \quad x < 0. \end{cases}$$

A função f *não é diferenciável em* $x = 0$ *e* $f'(x) \neq 0$ *para* $x \neq 0$*. Tem-se contudo* $f(0)$ *máximo absoluto e relativo, pois qualquer que seja* $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) \leq f(0) = 1$$

Teorema 3.8.26 (Teorema de Rolle)**.** *Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $b > a$*, uma função contínua em* $[a, b]$ *e diferenciável em* $]a, b[$*.*
Se $f(a) = f(b)$ *então existe* $c \in]a, b[$ *tal que*

$$f'(c) = 0\,.$$

Demonstração.
Pelo teorema de Weierstrass se a função f é contínua em $[a, b]$ tem máximo M e mínimo m nesse intervalo. Se $M = m$ f é constante em $[a, b]$ e portanto f' anula-se em qualquer ponto de $]a, b[$. Se $M > m$ a hipótese $f(a) = f(b)$ permite reconhecer que pelo menos um dos pontos com imagem M ou m é atingido em $c \in]a, b[$ vindo do teorema 3.8.20 $f'(c) = 0$. ■

Observação 3.8.27 (Interpretação geométrica)**.** *O gráfico de uma função nas condições do teorema de Rolle entre dois pontos com a mesma ordenada tem sempre pelo menos um ponto de tangente horizontal.*

Exemplo 3.8.28. *Seja* $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $a \neq 0$*,* $f(x) = x^2$*. A função é diferenciável em* $]-a, a[$ *e*

$$f(-a) = f(a) = a^2$$

A função f tem tangente horizontal em $c \in]-a, a[$ em particular em $c = 0$.

Exemplo 3.8.29. $g : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $g(x) = |x|$

$$g(-a) = g(a)$$

Não existe $c \in]-a, a[$ tal que $g'(c) = 0$ pois a função g não é diferenciável em $]-a, a[$, já que não é diferenciável em 0.

Facilmente se estabelecem os seguintes corolários do teorema de Rolle.

Corolário 3.8.30. *Entre dois zeros de uma função diferenciável num intervalo há pelo menos um zero da sua derivada.*

Corolário 3.8.31. *Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável num intervalo não pode haver mais de um zero dessa função.*

Demonstração.
Se existissem, por exemplo, dois zeros da função, existiria um terceiro zero da função derivada entre esses zeros o que contraria a hipótese dos zeros da derivada serem consecutivos. ■

Teorema 3.8.32 (Teorema de Lagrange)**.** *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$.*
Então existe pelo menos $c \in]a,b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demonstração.
Seja

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(b) - \lambda b = f(a) - \lambda a$$

A igualdade anterior mostra que a função $g(x) = f(x) - \lambda x$ tem valores iguais nos extremos do intervalo $[a,b]$. Sendo g contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$ o teorema de Rolle assegura a existência de $c \in]a,b[$ tal que $g'(c) = 0$ ou seja tal que

$$g'(c) = f'(c) - \lambda = 0$$

Concluindo-se que

$$f'(c) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

Exemplo 3.8.33. *Sendo $\alpha > 1$ mostre-se aplicando o teorema de Lagrange que:*

$$(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x \,, \qquad x > 0$$

Aplique-se a $g(t) = (1 + t)^\alpha$ o teorema de Lagrange em $[0, x]$. Tem-se que existe $c \in]0, x[$ tal que

$$\frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x - 0} = \alpha(1 + c)^{\alpha - 1}.$$

Como $\alpha > 1$, $c > 0$ tem-se $\alpha(1+c)^{\alpha-1} > 1$ vindo $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$, $x > 0$.

Estabeleçam-se alguns corolários do teorema de Lagrange.

Corolário 3.8.34. *Se $f'(x) = 0$, $x \in I = [a,b]$ então f é constante em I.*

Demonstração.
Seja $x_1 < x_2$ e $x_1, x_2 \in I$. Estando a função f nas condições do teorema de Lagrange

$$\underset{c \in]x_1,x_2[}{\exists} \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

concluindo-se que f é uma função constante em I. ■

Corolário 3.8.35. *Se f, g são duas funções diferenciáveis em $I = [a,b]$ e se para qualquer $x \in I$, $f'(x) = g'(x)$ então $f - g$ é constante em I.*

Demonstração.
Tem-se $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) = 0$, $x \in I$ vindo do corolário anterior que $f - g$ é uma função constante. ■

Considere-se finalmente um corolário importante na análise da injectividade de funções.

Corolário 3.8.36. *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$.*
Se $f'(x) > 0$ qualquer que seja $x \in]a,b[$ ou $f'(x) < 0$ qualquer que seja $x \in]a,b[$ então f é respectivamente estritamente crescente em $[a,b]$ ou estritamente decrescente em $[a,b]$

Demonstração.
Seja $f'(x) > 0$ qualquer que seja $x \in]a,b[$. Se $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_2 > x_1$ tem-se em $[x_1, x_2]$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \qquad c \in]x_1, x_2[.$$

Vindo

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c).(x_2 - x_1) > 0 \qquad c \in]x_1, x_2[.$$

Assim

$$x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1).$$

Concluindo-se que f é uma função estritamente crescente em $[a,b]$. ■

3.9 Teorema de Cauchy. Regra de Cauchy

Teorema 3.9.37 (Teorema de Cauchy)**.** *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, funções contínuas em $[a, b]$, diferenciáveis em $]a, b[$ e $g'(x) \neq 0$, $x \in]a, b[$. Então existe pelo menos $c \in]a, b[$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demonstração.
A função g é contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e $g'(x) \neq 0$, $x \in]a, b[$, concluindo-se do teorema de Rolle que $g(a) \neq g(b)$.

Seja

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

ou seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(b) - \lambda g(b) = f(a) - \lambda g(a).$$

Defina-se $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - \lambda g(x)$. A função h é contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e $h(a) = h(b)$. Pelo teorema de Rolle

$$\underset{c \in]a,b[}{\exists} \quad h'(c) = f'(c) - \lambda g'(c) = 0$$

concluindo-se que

$$\lambda = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

■

Consequência directa do teorema anterior é o resultado seguinte designado por regra de Cauchy

Teorema 3.9.38 (Regra de Cauchy)**.** *Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis em $]a, b[$ verificando as condições*

i) $g'(x) \neq 0\,, \qquad x \in]a, b[$

ii) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$, $(\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty)$

Então se existe em $\overline{\mathbb{R}}$

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração. *

Seja $l = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$ e δ um número real positivo arbitrário. Determine-se $\beta \in]a, b[$ por forma que se tenha, para $x \in]a, \beta[$:

$$l - \delta < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \delta$$

Sendo x, y dois pontos distintos do intervalo $]a, \beta[$, do teorema de Cauchy, existe um ponto ξ entre x e y e consequentemente também no intervalo $]a, \beta[$ em que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Assim para quaisquer x e y nas condições indicadas

$$l - \delta < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < l + \delta$$

Considere-se a hipótese de f, g tenderem para zero, quando x tende para a. Fixado x qualquer que seja de $]a, \beta[$, e fazendo $y \to a$ na desigualdade anterior, tem-se

$$l - \delta \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l + \delta$$

e conclui-se assim que existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Analogamente se demonstra quando se considera a hipotese de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.

■

Observação 3.9.39. *Pode existir* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *e não existir* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Se $a \in int\, I =]a_1, b_1[$ demonstra-se facilmente o corolário seguinte:

Corolário 3.9.40. *Seja I um intervalo aberto, $a \in I$ e f, g duas funções diferenciáveis em $I \setminus \{a\}$. Se $g'(x) \neq 0$, $x \in I \setminus \{a\}$ e as funções tendem ambas para 0 ou ∞ quando $x \to a$ então*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

sempre que o segundo limite exista em $\overline{\mathbb{R}}$.

A regra de Cauchy permite resolver vários problemas de indeterminações. Considerem-se alguns exemplos

Exemplo 3.9.41. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2.$

De facto

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = 1/2$$

Exemplo 3.9.42. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$

De facto

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\ln(1 + x))'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{1/(1 + x)}{1} = 1$$

Exemplo 3.9.43. $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0.$

De facto

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{1/x}$$

vindo

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x \to 0} x = 0$$

Exemplo 3.9.44. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right) = 0.$

De facto

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x}$$

vindo

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen} x - x)'}{(x\operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{2\cos x - x\operatorname{sen} x} = 0$$

Antes de se considerar mais alguns exemplos de aplicação da regra de Cauchy defina-se para $x > 0$ a função $x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

e sendo $f(x) > 0$

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Exemplo 3.9.45. *Determine-se* $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{sen} x \ln x}$.

Tem-se

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(1/\operatorname{sen} x)'} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{\cos x/\operatorname{sen}^2 x} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\frac{1}{\cos x} = 0$$

assim

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = 1$$

Exemplo 3.9.46. *Determine-se* $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to +\infty} e^{x\ln(1+1/x)}$.

Tem-se

$$\lim_{x\to +\infty} x\ln(1+1/x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln(1+1/x))'}{(1/x)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1+1/x} = 1$$

assim

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Exemplo 3.9.47. *Determine-se* $\lim_{x\to +\infty} x^{1/(x-1)} = \lim_{x\to +\infty} e^{1/(x-1)\ln x}$.

Tem-se

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1/x}{1} = 0$$

assim

$$\lim_{x\to +\infty} x^{1/(x-1)} = 1$$

3.10 Derivadas de ordem superior. Fórmula de Taylor

Considerando uma função $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, convenciona-se designar por D_1 o subconjunto de D em que a função f é diferenciável, domínio da função derivada f'. A função f diz-se duas vezes diferenciável em $a \in D_1$, se f' for diferenciável em a. Em D_2, conjunto em que f' é diferenciável, define-se a segunda derivada f'', e mais geralmente tem-se:

Definição 3.10.48. *A derivada de ordem $n \in \mathbb{Z}_0^+$ de f, $f^{(n)}$, é definida por indução*

$$f^{(0)} = f, \qquad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)', \qquad n \in \mathbb{N}$$

sendo o domínio de $f^{(n+1)}$, D_{n+1}, o conjunto em que $f^{(n)}$ é diferenciável.

A função f diz-se n-vezes diferenciável em $a \in D$ se e só se existirem as derivadas $f'(a)$, $f''(a), \ldots,$ $f^{(n)}(a)$. A função f diz-se indefinidamente diferenciável em $a \in D$ se e só se, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, f é n-vezes diferenciável em a.
Tem-se $f \in C^n(A)$ se e só se f é n vezes continuamente diferenciável no aberto A ou seja se f é n-vezes diferenciável em A com $f^{(n)}$ função contínua em A.

Exemplo 3.10.49. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 H(x)$*
Tem-se

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \geq 0 \\ \\ 2x & se \quad x < 0. \end{cases}$$

As derivadas de ordem superior não estão definidas em $x = 0$

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x > 0 \\ \\ 2 & se \quad x < 0. \end{cases}$$

$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad n \geq 3 \qquad x \neq 0$$

Observação 3.10.50. *As funções elementares, por exemplo, a exponencial e a logarítmica, são funções indefinidamente diferenciáveis.*

Demonstra-se facilmente usando o princípio de indução matemática e os teoremas 3.6.11, 3.7.12, 3.7.15 a seguinte proposição.

Proposição 3.10.51. *Se f, g são funções n-vezes diferenciáveis em a, também o são as funções $f \pm g$, fg e f/g se $g(a) \neq 0$. Tendo-se*

$$(f \pm g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \pm g^{(n)}(a)$$

e

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} f^{(n-k)}(a) g^{(k)}(a)\,, \qquad \textit{(fórmula de Leibnitz)}$$

Aborde-se agora o problema da aproximação de funções reais de variável real por meio de polinómios. Em termos muito gerais a questão consiste em determinar o polinómio que melhor possa substituir a função f sob certas condições com erro controlado. Comece-se por analisar, se um polinómio do 1º grau pode constituir uma boa aproximação local da função f.
Sendo a função f diferenciável em a, o polinómio

$$p_1(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$$

que verifica as condições

$$p_1(a) = f(a) \qquad \text{e} \qquad p_1'(a) = f'(a)$$

constitui uma boa aproximação local da função f. Geometricamente corresponde a substituir na vizinhança do ponto de abcissa a, a curva de equação $y = f(x)$ pela sua tangente nesse ponto o que leva a cometer-se o erro

$$r_1(x) = f(x) - p_1(x)$$

em que

$$\lim_{x \to a} \frac{r_1(x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)}{x-a} =$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) = 0$$

representado simbolicamente por

$$r_1(x) = o(x-a) \qquad \text{quando} \quad x \to a$$

Conclui-se assim que, se a função f é diferenciável em a

$$f(x) = p_1(x) + o(x-a) \qquad \text{quando} \quad x \to a$$

Analise-se, em seguida, a situação em que o polinómio que se pretende que aproxime a função f é de grau n sendo a aproximação num intervalo em vez de local. Esta análise conduz ao teorema de Taylor. O teorema de Taylor estabelece precisamente que é possível aproximar por um polinómio de grau n, uma função $n+1$ vezes diferenciável num dado intervalo. O teorema de Taylor fornece mesmo uma fórmula para o erro que se comete quando se substituir a função pelo polinómio, fórmula que em princípio permite obter um majorante do erro.

Teorema 3.10.52 (Teorema de Taylor)**.** *Seja $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x_0, x \in I$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que as funções $f, f', f'', ...f^{(n)}$ são contínuas em I e $f^{(n+1)}$ existe em $]a, b[$ então*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)\,, \qquad \textit{(fórmula de Taylor)}$$

em que

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

é o polinómio de Taylor de grau n relativo a x_0 e

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\,, \qquad c \in]x, x_0[$$

é o resto de Lagrange.

Demonstração.
Seja $J = [x, x_0]$ em que $x_0 > x$ e defina-se para x fixo
$F : J \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(t) = f(x) - f(t) - (x - t)f'(t) - \ldots - \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n)}(t),$$

tal que

$$F(t)\,|_{t=x_0} = f(x) - P_n(x)$$

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) + \frac{2(x - t)}{2} f''(t) - (x - t)f''(t) + \ldots - \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$$

Aplicando o teorema de Cauchy às funções F e G, sendo a função G definida por

$$G(t) = (x - t)^{n+1} \qquad t \in [x, x_0],$$

tem-se

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F'(c)}{G'(c)} \qquad c\in]x,x_0[$$

Para x fixo $(t=x)$

$$F(x)=0\,, \qquad G(x)=0 \qquad \text{e} \qquad G(x_0)=(x-x_0)^{n+1}$$

vindo

$$\frac{F(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=-\frac{(x-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)\frac{1}{-(n+1)(x-c)^n}$$

e finalmente

$$f(x)=P_n(x)+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

■

Observação 3.10.53. *Se* $n=0$ *a fórmula de Taylor é equivalente ao teorema de Lagrange em* $[x,x_0]$*:* $f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(c)$

Exemplo 3.10.54. *Aproximar por um polinómio de Taylor de grau 2 em* x *a função* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*,* $f(x)=\cos x$ *e majorar o erro de aproximação no intervalo* $I=[-1,1]$.

A função f é indefinidamente diferenciável em $\mathbb{R}$ e tem-se

$$f(x)=\cos x\hookrightarrow f(0)=1 \qquad f'(x)=-\operatorname{sen} x\hookrightarrow f'(0)=0$$
$$f''(x)=-\cos x\hookrightarrow f''(0)=-1 \qquad f'''(x)=\operatorname{sen} x\hookrightarrow f'''(c)=\operatorname{sen} c$$

Assim

$$f(x)=1-\frac{1}{2}x^2+R_2(x)$$

em que $R_2(x)=\dfrac{x^3}{6}\operatorname{sen} c$.

Atendendo a que $|\operatorname{sen} c|\le 1$ e $|x|\le 1$ tem-se:

$$|R_2(x)|\le 1/6 \qquad x\in[-1,1]$$

3.11 A fórmula de Taylor e os extremos de uma função

É necessário, mas não suficiente, para que uma função f diferenciável em x_0 tenha um extremo local, que $f'(x_0) = 0$. De uma forma geral chamam-se pontos de estacionaridade de uma função f aos zeros da sua derivada. Para esclarecer se um ponto de estacionaridade é ou não um ponto de máximo ou minimo local têm-se, essencialmente, dois caminhos:
$i)$ recorrer ao sinal da 1ª derivada.
(Por exemplo se $f'(x_0) = 0$ e $f'(x)$ é positiva em $]\alpha, x_0[$ e negativa em $]x_0, \beta[$, $\alpha < x_0 < \beta$, $f(x_0)$ é um máximo local de f)
$ii)$ recorrer à fórmula de Taylor.

Teorema 3.11.55. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, $x_0 \in I$ tal que:*
- *existem $f', f'', \ldots, f^{(n)}$;*
- *a função $f^{(n)}$ é contínua numa vizinhança de x_0;*
- $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \ , f^{(n)}(x_0) \neq 0$

então
$i)$ se n é par tem-se
- *f tem em x_0 um minimo local se $f^{(n)}(x_0) > 0$.*
- *f tem em x_0 um máximo local se $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

$ii)$ se n é impar tem-se que f não tem máximo local nem minimo local em x_0.

Demonstração. Nas condições do teorema numa vizinhança de x_0 pode escrever-se a fórmula de Taylor de ordem $n-1$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n \qquad c \in]x_0, x[.$$

$i)$ Se n é par, tem-se $(x - x_0)^n \geq 0$
- Seja $f^{(n)}(x_0) > 0$

Sendo $f^{(n)}$ contínua em x_0 existe uma vizinhança de x_0 em que $f^{(n)}(x) \geq 0$. Assim de $\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n \geq 0$ tem-se que $f(x) \geq f(x_0)$ ou seja existe minimo em x_0.
- Seja $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Analogamente tem-se $f(x) \leq f(x_0)$ ou seja existe máximo em x_0.

$ii)$ Se n é impar, $(x - x_0)^n$ qualquer que seja a vizinhança de x_0 muda de sinal consoante $x > x_0$ ou $x < x_0$ consequentemente não existe máximo nem minimo. ■

A fórmula de Taylor permite também analisar a posição do gráfico de uma função na vizinhança de um ponto em relação à tangente ao gráfico nesse ponto.

Seja

- f diferenciável em x_0
- $t(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$

Se existe $\epsilon > 0$ tal que em $V_\epsilon(x_0)$ o gráfico de f está por cima do gráfico de t diz-se que a função f é convexa em x_0 ou que o seu gráfico tem a concavidade voltada para cima.

Se existe $\epsilon > 0$ tal que em $V_\epsilon(x_0)$ o gráfico de f está por baixo do gráfico de t diz-se que a função f é concava em x_0 ou que o seu gráfico tem a concavidade voltada para baixo.

Se existe $\epsilon > 0$ tal que num dos intervalos $]x_0 - \epsilon, x_0[$ e $]x_0, x_0 + \epsilon[$ o gráfico de f está por cima do gráfico de t e no outro o gráfico t está por cima do gráfico de f diz-se que x_0 é um ponto de inflexão de f ou que o seu gráfico tem uma inflexão em x_0 (Se f é contínua em x_0 e se $f'(x_0) = +\infty$ ou $f'(x_0) = -\infty$ também se diz que f tem uma inflexão em x_0).

Teorema 3.11.56. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, $x_0 \in I$ tal que:*

- *a função f é n vezes diferenciável;*
- *a função $f^{(n)}$ é contínua em $x_0 \in I$;*
- $f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0$

então

$i)$ se n é par tem-se que

- *f tem a concavidade voltada para cima em x_0 se $f^{(n)}(x_0) > 0$.*
- *f tem a concavidade voltada para baixo em x_0 se $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

$ii)$ se n é impar tem-se que x_0 é ponto de inflexão.

Demonstração. Numa vizinhança de x_0 pode escrever-se a fórmula de Taylor de ordem $n - 1$

$$f(x) - (f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n \qquad c \in]x_0, x[.$$

$i)$ Seja n é par

Se $f^{(n)}(x_0) > 0$ o gráfico de f está acima da tangente.

Se $f^{(n)}(x_0) < 0$ o gráfico de f está abaixo da tangente.

$ii)$ Seja n é impar, o gráfico de f está abaixo do gráfico da tangente ou acima consoante $x > x_0$ ou $x < x_0$ designando-se x_0 um ponto de inflexão.

■

Observação 3.11.57. *Seja* $f'(x_0) = 0$
• *Se* n *é par tem-se que* x_0 *é ponto de minimo se* $f^{(n)}(x_0) > 0$ *e* x_0 *é ponto de máximo se* $f^{(n)}(x_0) < 0$.
• *Se* n *é impar,* x_0 *é ponto de inflexão com tangente horizontal.*

3.12 Assíntotas ao gráfico de uma função

Associado ao conceito de limite envolvendo $+\infty$ ou $-\infty$ surge o conceito de assíntota de curvas, que de uma forma pouco precisa designa uma recta arbitrariamente próxima da curva.

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Existem três tipos possíveis de assíntotas ao gráfico de f. Assíntotas horizontais. Assíntotas verticais. Assíntotas oblíquas.

i) Uma recta definida por $y = b$, $b \in \mathbb{R}$ é uma assíntota horizontal à curva $y = f(x)$ se

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - b) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - b) = 0$$

ii) Uma recta definida por $x = c$, $c \in \mathbb{R}$ é uma assíntota vertical à curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das condições seguintes se verifica

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$$

iii) Uma recta definida por $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ é uma assíntota oblíqua à curva $y = f(x)$ se

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax - b) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax - b) = 0$$

Analise-se de seguida com mais pormenor as assíntotas oblíquas

Proposição 3.12.58. *Para que o gráfico da função* f *tenha como assíntota quando* $x \to +\infty(-\infty)$ *a recta* $y = ax + b$ *é necessário e suficiente que existam e sejam finitos os limites*

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty(-\infty)} \frac{f(x)}{x} = a$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty(-\infty)} (f(x) - ax) = b$

Demonstração. Se a função f tem uma assíntota obliqua, $y = ax + b$, quando $x \to +\infty(-\infty)$ tem-se $f(x) = ax + b + \varphi(x)$, em que

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)} \varphi(x) = 0$$

Assim por um lado

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{\varphi(x)}{x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty(-\infty)} \frac{f(x)}{x} = a$$

e por outro lado

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty(-\infty)} (b + \varphi(x)) = b$$

Reciprocamente, se existem e são finitos os limites indicados definindo a função $\varphi(x) = f(x) - ax - b$ tem-se

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)} \varphi(x) = 0$$

e a recta de equação $y = ax + b$ é assíntota obliqua à curva $y = f(x)$. ∎

Exemplo 3.12.59. *Seja* $f :]-\infty, 0[\cup]1. + \infty[\to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-1} & se \quad x > 1 \\[2ex] \dfrac{3x^2+4x+1}{x} & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Verifique se existem assíntotas à curva $y = f(x)$

Para $x > 1$ tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

e $y = 2$ é uma assíntota horizontal à curva $y = f(x)$ quando $x \to +\infty$.
Tem-se igualmente

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-1}{x-1} = +\infty$$

assim $x = 1$ é uma assíntota vertical à curva $y = f(x)$
Para $x < 0$ tem-se

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - 3x - 4) = 0$$

e a recta $y = 3x + 4$ é uma assíntota oblíqua à curva $y = f(x)$ quando $x \to +\infty$.
Finalmente tem-se

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

concluindo-se que $x = 0$ é uma assíntota vertical à curva $y = f(x)$.

Sejam P, Q funções polinomiais que não têm zeros comuns e f a função definida por

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus A$$

sendo A o conjunto dos zeros reais da função polinomial Q.

- Se o grau de P é igual ao grau de Q tem-se

$$f(x) = b + \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad b \in \mathbb{R}$$

em que R é uma função polinomial de grau menor que Q.
Uma vez que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = 0$$

tem-se que $y = b$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$.

- Se o grau de P é maior que o de Q uma unidade tem-se

$$f(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad a, b \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$$

em que R é uma função polinomial de grau menor que Q.
Uma vez que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = 0$$

tem-se que $y = ax + b$ é uma assíntota oblíqua da curva $y = f(x)$.

- Seja $c \in A$ ou seja $Q(c) = 0$.

Facilmente se verifica que quando $x \to c^{\pm}$ tem-se $f(x) \to \pm\infty$ (dependendo dos sinais dos coeficientes principais das funções polinomiais P e Q) concluindo-se que a recta $x = c$ é uma assíntota vertical à curva $y = f(x)$.

3.13 Exercícios

3.13.1 Exercícios resolvidos

Exerc 3.13.1. *Seja* $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *a função definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \operatorname{sen}(\sqrt{x}) \quad se \quad x \in]0, +\infty[\\ \\ 0 \quad se \quad x = 0 \end{cases}$$

i) A função f *é contínua no seu domínio? Justifique.*

ii) Considere $x_n = \dfrac{1+2n}{n+1}$*. Determine o limite da sucessão* $f(x_n)$*.*

iii) A função tem máximo e mínimo em $[2,3]$*. Justifique.*

Resolução.

i) A função f é contínua em $x = 0$, uma vez que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(x^2 - \operatorname{sen}(\sqrt{x})\right) = 0 = f(0)$$

A função f é igualmente contínua para $x \neq 0$ uma vez que resulta da composição e adição de funções contínuas.

ii) A sucessão $x_n \in \mathbb{R}^+$ e

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+2n}{n+1} = 2$$

Sendo a função f contínua em $x = 2$ tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(2)$$

iii) Uma vez que $[2,3] \subset \mathbb{R}^+$ e a função é contínua em $\mathbb{R}^+$, também é contínua em $[2,3]$. Sendo o intervalo $[2,3]$ limitado e fechado, são satisfeitas as condições do teorema de Weierstrass o que permite concluir que a função tem nesse intervalo máximo e minimo.

■

Exerc 3.13.2. *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *a função definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(1+e^x) \quad se \quad x \in]-\infty, 1] \\ \\ \sqrt[3]{x^2-1} \quad se \quad x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

i) A função f é contínua em $x = 1$? Justifique.

ii) Defina a função derivada de f.

Resolução.

i) A função f não é contínua em $x = 1$, uma vez que

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt[3]{x^2 - 1} = 0 \neq f(1) = \ln(1 + e)$$

ii) Não sendo a função f contínua em $x = 1$ também não é diferenciável nesse ponto.
Para $x < 1$ e para $x > 1$, a função f é diferenciável pois resulta do produto e da composição de funções diferenciáveis.

$$f'(x) = \begin{cases} \ln(1 + e^x) + \dfrac{xe^x}{1 + e^x} & \text{se} \quad x \in]-\infty, 1[\\ \\ \dfrac{2x}{3}(x^2 - 1)^{-\dfrac{2}{3}} & \text{se} \quad x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

■

Exerc 3.13.3. *Considere a função $f : [-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x + 3) + 1 & \textit{se} \quad x > 1 \\ \\ \cos(\operatorname{arcsen} x) & \textit{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

i) A função f é diferenciável em $x = 1$?

ii) Defina a função derivada de f.

iii) A função f é monótona no intervalo $[1, +\infty[$? A função f tem extremos no domínio? Justifique.

Resolução. Simplificando a função f,

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x + 3) + 1 & \text{se} \quad x > 1 \\ \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

i) A função f não é diferenciável em $x = 1$, uma vez que não é contínua em $x = 1$.

$$f(1) \neq \lim_{x \to 1_+} \ln(x+3) + 1 = \ln(4) + 1$$

ii) A função derivada de f define-se

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & \text{se} \quad x > 1 \\ \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se} \quad -1 < x < 1 \end{cases}$$

iii) A função é estritamente crescente no intervalo $[1, +\infty[$, pois $f'(x) > 0$. A função tem um máximo local em $x = 0$, uma vez que $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ para $x \in]-1, 0[$ e $f'(x) > 0$ para $x \in]0, 1[$. Seja g a restrição da função f ao intervalo $[-1, 1]$, g é uma função contínua no seu domínio e como $[-1, 1]$ é um intervalo fechado e limitado a função g tem máximo e mínimo em $[-1, 1]$.

■

Exerc 3.13.4. *Considere a função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2 - 1) & se \quad x \geq 0 \\ \\ 2x\,(\ln(-x) + 1) - 1 & se \quad x < 0 \end{cases}$$

i) A função f é diferenciável em $x = 0$? Defina a função derivada de f.

ii) A função é monótona em $\mathbb{R}^+$? Justifique.

iii) Determine os possíveis extremos locais da função f para $x < 0$.

Resolução.

i) Recorrendo à regra de Cauchy

$$\lim_{x \to 0^-} 2x \ln(-x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2\ln(-x)}{1/x} = 0.$$

De facto

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2/x}{-x^2} = -\lim_{x \to 0^-} 2x = 0.$$

Assim

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2x\,(\ln(-x) + 1) - 1 = -1 \neq f(0) = \operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4.$$

Conclui-se que a função f não é contínua em $x = 0$ consequentemente também não é diferenciável em $x = 0$.
A função derivada de f define-se

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1+(x^2-1)^2} & \text{se} \quad x > 0 \\ \\ 2\ln(-x) + 4 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

ii) Como $f'(x) > 0$ a função f é monótona em $\mathbb{R}^+$.

iii) Para $x < 0$ os pontos de estacionaridade são as raízes de $f'(x) = 0$ ou seja as raízes de $2\ln(-x) + 4 = 0$. $f(-e^{-2})$ é o único ponto de estacionaridade em $\mathbb{R}^-$. Sendo $f''(x) = 2/x$ para $x < 0$, $f''(-e^{-2}) < 0$ e tem-se que $f(-e^{-2})$ é um máximo local em $\mathbb{R}^-$.

■

Exerc 3.13.5. *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) & \textit{se} \quad x < 0 \\ \\ 3x^4 - 4x^3 + \dfrac{1}{2} & \textit{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

i) Defina a função derivada de f.

ii) A função tem extremos para $x > 0$*? Justifique.*

iii) A equação $f(x) = 0$ *tem solução em* $[0, 1]$*? Justifique.*

iv) Analise a existência do limite

$$\lim_{x\to 0} x f(\cos x)\,.$$

Resolução.

i) Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1/2$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ são reais diferentes f não é contínua em $x = 0$ consequentemente f não é diferenciável em $x = 0$.
A função derivada define-se

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ 12x^3 - 12x^2 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases} \tag{3.13.1}$$

ii) Para $x > 0$, $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$. Analisando $f'(x) = 0$ tem-se:

$$12x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$$

$x = 1$ é ponto de mínimo pois $f'(x) < 0$ para $0 < x < 1$ e $f'(x) > 0$ para $x > 1$.

iii) Como $f(0)f(1) < 0$ e $f_1 = f|_{[0,1]}$ é contínua em $[0,1]$, do teorema de Bolzano, conclui-se que existe um zero em $]0,1[$.

iv)

$$\lim_{x\to 0^+} xf(\cos x) = \lim_{x\to 0^+} x(3\cos^4 x - 4\cos^3 x + \frac{1}{2}) = 0.$$

Por outro lado

$$\lim_{x\to 0^-} xf(\cos x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1-\cos x)}{1/x}$$

e da regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{1-\cos x} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{2x\operatorname{sen} x + x^2\cos x}{\operatorname{sen} x} =$$

$$-\lim_{x\to 0^-} 2x - \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\operatorname{sen} x} x\cos x = 0$$

Concluindo-se que

$$\lim_{x\to 0^-} xf(\cos x) = \lim_{x\to 0^+} xf(\cos x)$$

■

Exerc 3.13.6. *Seja* $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* $]0,1[$ *e tal que para* $n \in \mathbb{N}$

$$f(\frac{1}{n+1}) = f(\frac{1}{n+2})$$

Supondo que existe $\lim_{x\to 0} f'(x)$*, determine o valor desse limite.*

Resolução. A função f é contínua em $[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$, e diferenciável em $]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}[$, $n \in \mathbb{N}$, assim do teorema de Lagrange, existe $c_n \in]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}[$ tal que

$$\frac{f(\frac{1}{n+1}) - f(\frac{1}{n+2})}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}} = f'(c_n) = 0$$

Construa-se então a sucessão de reais, c_n, tal que $\dfrac{1}{n+2} < c_n < \dfrac{1}{n+1}$, sucessão que é convergente para 0, pelo teorema das sucessões enquadradas. Como existe $\lim_{x\to 0} f'(x)$ qualquer que seja $u_n \to 0$ existe $\lim f(u_n)$. Como se tem $c_n \to 0$ tal que $\lim f'(c_n) = 0$ então $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$. ■

Exerc 3.13.7. *Seja $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e tal que $f'(x) \neq 1$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}^+$. Mostre que existe quando muito um número real positivo x_0 tal que $f(x_0) = x_0$*

Resolução. Admita-se que existem $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^+$, $x_0 < x_1$, tais que $f(x_0) = x_0$ e $f(x_1) = x_1$. A função $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(x) - x$ tem então zeros x_0, x_1. Como a função h é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ pois resulta da soma de funções diferenciáveis, aplicando o teorema de Rolle à função h no intervalo $[x_0, x_1]$ existe $c \in]x_0, x_1[$ tal que $h'(c) = 0$ ou seja $f'(c) = 1$ o que é falso pois contraria a hipotese. Assim existe apenas x_0 tal que $f(x_0) = x_0$. ■

Exerc 3.13.8. *Mostre, através do teorema de Lagrange, que*

$$\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

Resolução. A função $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \ln t$ é uma função diferenciável. Uma vez que a função é contínua em $[x, x+1]$ e diferenciável em $]x, x+1[$ aplicando o teorema de Lagrange à função f no intervalo $[x, x+1]$, $x > 0$, existe $c \in]x, x+1[$ tal que

$$\frac{\ln(x+1) - \ln x}{x+1-x} = \frac{1}{c}$$

Ora como $\dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{x}$ conclui-se que

$$\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

■

Exerc 3.13.9. *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ uma função contínua. Sendo f uma função com quatro zeros em $]a, b[$ com derivada de terceira ordem contínua em $]a, b[$, terá a função f''' um zero em $]a, b[$? Justifique.*

Resolução. Sendo f uma função com quatro zeros em $]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$, da aplicação do teorema de Rolle a f, concluimos que existem três zeros de f' em $]a, b[$, aplicando novamente o teorema de Rolle a f', concluimos que existem dois zeros de f'' em $]a, b[$ e finalmente aplicando o teorema de Rolle a f'', concluimos que a função f''' tem um zero em $]a, b[$

■

Exerc 3.13.10. *Seja* $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que existem* f' *e* f''. *Sendo* $f''(x) < 0,\ x \in]-1,1[$ *mostre que se existe uma sucessão* $x_n \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ *tal que* $f'(x_n) = \frac{1}{n+1}$ *então* f *tem pelo menos um máximo local.*

Resolução. A sucessão $x_n \in]-1/2, 1/2[$ sendo uma sucessão limitada. Assim pelo teorema de Bolzano-Weierstrass x_n tem uma subsucessão x_{n_k} convergente e $x_{n_k} \to c \in [-1/2, 1/2]$.
Ora como f' é contínua em $[-1/2, 1/2]$ então tem-se $f'(x_{n_k}) \to f'(c)$ em que

$$f'(c) = \lim f'(x_{n_k}) = 0$$

O número real c é um ponto de estacionaridade de f que como $f''(c) < 0$ ($f''(x) < 0$ para $x \in] - 1, 1[$) tem como consequência que $f(c)$ é máximo de f.

■

Exerc 3.13.11. *Determine se existirem os seguintes limites*

$i)$ $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\ln x}$ $\quad ii)$ $\lim_{x\to +\infty}(1 + \dfrac{2}{x})^x$ $\quad iii)$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2 \operatorname{tg} x}$.

Resolução.

i)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln x} = \frac{\operatorname{arctg} 0^+}{\ln 0^+} = 0$$

ii)

$$\lim_{x\to +\infty} (1 + \frac{2}{x})^x = e^{\lim_{x\to +\infty} x \ln(1+\frac{2}{x})}$$

determine-se

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{2}{x})}{\frac{1}{x}}.$$

Da regra de Cauchy como

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln(1 + \frac{2}{x}))'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} = 2$$

tem-se

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{2}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln(1 + \frac{2}{x}))'}{(\frac{1}{x})'} = 2$$

e finalmente $\lim_{x\to +\infty}(1 + \frac{2}{x})^x = e^2$

iii) Da regra de Cauchy, como

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x \operatorname{sen} x}{2x \operatorname{tg} x + x^2/\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2 \operatorname{tg} x + x/\cos^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x \cos^2 x}{2 \operatorname{sen} x \cos x\ + x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\operatorname{sen} x \cos^2 x}{x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{x} 2\cos x\ + 1} = -1/3$$

conclui-se que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2 \operatorname{tg} x} = -1/3.$$

■

Exerc 3.13.12. *Determine em $\mathbb{R}$, se existirem, os seguintes limites:*

$$i)\ \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{\operatorname{sen}(x-3)}, \qquad ii)\ \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} \operatorname{sen} x\right)^{1/x}.$$

Resolução.

i) Da regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x+1}{\cos(x-3)} = 1.$$

concluindo-se que

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{\operatorname{sen}(x-3)} = 1.$$

ii)

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} \operatorname{sen}(x)\right)^{1/x} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{x}\operatorname{sen}(x)\right)} = \mathrm{e}^0 = 1$$

uma vez que pela regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\ln\left(\frac{1}{x}\operatorname{sen}(x)\right)\right)'}{x'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-\operatorname{sen} x + x\cos x}{x \operatorname{sen} x}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x + x\cos x}{x \operatorname{sen} x}$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x - x\cos x}{2\cos x - x\operatorname{sen} x} = 0.$$

■

Exerc 3.13.13. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:*

$$f(x) = \frac{|x| - 2}{|x| + 1}$$

i) Estude a função f considerando nomeadamente a continuidade, diferenciabilidade, monotonia, extremos, concavidades, assíntotas.

ii) Esboce o gráfico da função f.

Resolução.

i) A função f é contínua em $\mathbb{R}$ pois resulta da composição de funções contínuas. É diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pois resulta da composição de funções diferenciáveis. Em $x = 0$ não é diferenciável, uma vez que $f'(0)$ não existe,

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x-2}{x+1}}{x} = -\infty$$

A função f é uma função par ($f(x) = f(-x)$) sendo o gráfico da função f simetrico relativamente ao eixo das ordenadas.
Quando $x > 0$

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Uma vez que $f'(x) > 0$, a função f é estritamente crescente em $x > 0$.

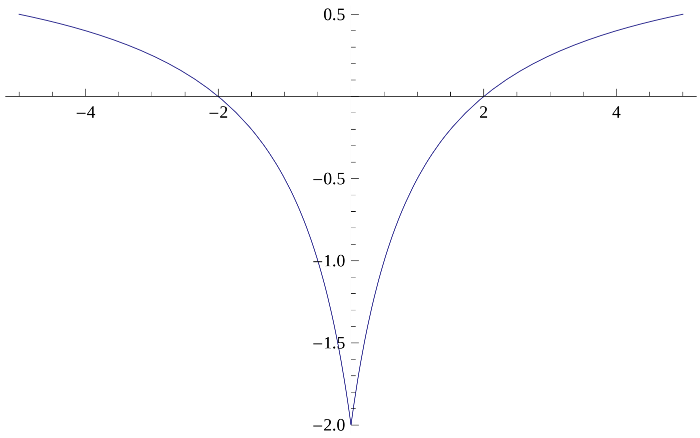
$$f''(x) = -\frac{4}{(x+1)^3}$$

Uma vez que $f''(x) < 0$, a função f é concâva em $x > 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 2/x}{1 + 1/x} = 1$$

Quando $x < 0$ da paridade da função f tem-se que a função f é estritamente decrescente, concâva e também com assintota horizontal quando $x \to -\infty$.
Em $x = 0$ a função tem um mínimo absoluto, uma vez que a função f é contínua, estritamente crescente em $x > 0$ e estritamente decrescente em $x < 0$.

ii) O gráfico da função f é:



■

Exerc 3.13.14. *Seja* $f :]-\infty, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1-x)$. *Determine o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de* $x+1$ *associado a* f.

Resolução.

$$P_2(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + f''(-1)\frac{(x+1)^2}{2}$$

determine-se os coeficientes
$f(-1) = \ln 2$,
$f'(-1) = -\frac{1}{1-x}|_{x=-1} = -1/2$
$f''(-1) = -\frac{1}{(1-x)^2}|_{x=-1} = -\frac{1}{4}$
Assim

$$P_2(x) = \ln 2 - 1/2(x+1) - \frac{1}{4}\frac{(x+1)^2}{2}$$

■

Exerc 3.13.15. *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida no exercício 3.13.4. Indique o polinómio de Taylor do 2º grau em potências de* $x+1$ *associado à função e determine um majorante para o erro cometido ao aproximar a função por esse polinómio no intervalo* $[-11/10, -9/10]$.

Resolução. O polinómio de Taylor do 2º grau em potências de $x+1$ associado à função é o polinómio

$$P_2(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + f''(-1)\frac{(x+1)^2}{2} = -3 + 4(x+1) - (x+1)^2$$

Quanto ao majorante para o erro, do teorema de Taylor para $c \in [-11/10, -9/10]$ tem-se

$$|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)| = |f'''(c)\frac{(x+1)^3}{3!}|$$

vindo uma vez que $|x+1| \leq 1/10$

$$|R_2(x)| = |\frac{2}{c^2}\frac{|(x+1)^3|}{3!}| \leq \frac{1}{3.10^3.c^2} \leq \frac{10^2}{3.10^3.9^2} = \frac{1}{3^5.10}$$

■

Exerc 3.13.16. *Seja* $f :]-3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+3)+1$. *Indique um majorante do erro que se comete ao aproximar a função* f *em* $[1,3]$ *pelo polinómio de Taylor do 2º grau em potências de* $x-2$.

Resolução. Do teorema de Taylor, $f(x) = P_2(x) + R_2(x)$ para $x \in [1,3]$, em que $P_2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + f''(2)(x-2)^2/2$ e
$R_2(x) = f'''(c)(x-2)^3/3!$, $c \in [2,x]$.
Tem-se assim para $c \in [2,x]$

$$|f(x)-P_2(x)| = |R_2(x)| = |f'''(c)(x-2)^3/3!| = |\frac{2(x-2)^3}{6(c+3)^3}| < \frac{|(x-2)|^3}{3^4} < \frac{1}{3^4}$$

■

Exerc 3.13.17. *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\ln(1+e^x)$. *Indique um majorante para o erro que se comete ao aproximar a função* f *no intervalo* $]-1,1[$ *pelo polinómio de Taylor de 1º grau em potências de* x.

Resolução. Do teorema de Taylor tem-se

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x) = f(0) + f'(0)x + f''(c)\frac{x^2}{2!}, \quad c \in [0,x]$$

Assim para $x \in]-1,1[$,
$|f(x) - P_1(x)| = |R_1(x)| =$

$$= \left|\frac{2e^{2c} + (2+c)e^c}{(1+e^c)^2}\right| \frac{x^2}{2} < \frac{2e^{2c}+(2+c)e^c}{2(1+e^c)^2} < \frac{2e^{2c}+(2+c)e^c}{2} < \frac{2e^2+3e}{2}$$

■

Exerc 3.13.18. *Considere a função* $f : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x(\ln(-x)+1) - 1$$

Indique o polinómio de Taylor do 2º grau em potências de $x+1$ *associado à função* f *e determine um majorante para o erro cometido ao aproximar a função por esse polinómio no intervalo* $[-11/10, -9/10]$.

Resolução. O polinómio de Taylor do 2º grau em potências de $x+1$ associado à função é o polinómio

$$P_2(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + f''(-1)\frac{(x+1)^2}{2} = -3 + 4(x+1) - (x+1)^2$$

uma vez que

$$f'(x) = 2\ln(-x) + 4, \qquad f''(x) = 2/x$$

Quanto ao majorante para o erro, do teorema de Taylor, para $c \in [-11/10, -9/10]$ tem-se

$$|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)| = |f'''(c)\frac{(x+1)^3}{3!}|$$

vindo uma vez que $|x+1| \leq 1/10$

$$|R_2(x)| = |\frac{2}{c^2}\frac{|(x+1)^3|}{3!}| \leq \frac{1}{3.10^3.c^2} \leq \frac{10^2}{3.10^3.9^2} = \frac{1}{3^5.10}$$

■

Exerc 3.13.19. *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ com segunda derivada contínua em $]a,b[$ e $x_0 \in]a,b[$. Mostre que*

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

Resolução. Considere-se a fórmula de Taylor de 1ª ordem da função f em $x = x_0 + h$, com resto de Lagrange

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(c)h^2}{2!}$$

e em $x = x_0 - h$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(d)h^2}{2!}$$

Somando ambas as equações tem-se

$$\frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} = \frac{f''(d) + f''(c)}{2}$$

Sendo a função f'' contínua em $[a,b]$, de $c \in]x_0, x_0+h[$ e de $d \in]x_0-h, x_0[$ tem-se quando $h \to 0$ respectivamente $f''(c) \to f''(x_0)$ e $f''(c) \to f''(x_0)$ concluindo-se

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

■

3.13.2 Enunciados de exercícios

Exerc 3.13.20. *Sendo* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *a função definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \operatorname{arctg}(\frac{1}{x}) \quad se \quad x \in]0, +\infty[\\ \\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad se \quad x \in]-\infty, 0] \end{cases}$$

i) A função f *é contínua em* $x = 0$*? Justifique.*

ii) Defina a função derivada de f*.*

iii) Indique um majorante para o erro que se comete ao aproximar a função f *no intervalo* $[1, 3]$ *pelo polinómio de Taylor de 1º grau em potências de* $x-2$*.*

Exerc 3.13.21. *Sendo* $f :]-\frac{2}{\pi}, \frac{1}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ *a função definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arcsen}(-2x) \quad se \quad x \in]0, \frac{1}{2}[\\ \\ 0 \quad se \quad x = 0 \\ \\ \frac{\pi}{2} x e^{\frac{\pi}{2}x} \quad se \quad x \in]-\frac{2}{\pi}, 0[\end{cases}$$

i) A função f *é contínua em* $x = 0$*? Justifique.*

ii) Defina a função derivada de f*.*

iii) Determine a derivada da função inversa $g = f^{-1}$ *em* $f(\frac{1}{4})$*.*

Exerc 3.13.22. *Sendo* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *a função definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x(2 + \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) \quad se \quad x \in]0, +\infty[\\ \\ 0 \quad se \quad x = 0 \\ \\ \frac{\sqrt{1-x}}{x} \quad se \quad x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

i) A função f *é contínua em* $x = 0$*? Justifique.*

ii) Defina a função derivada de f*.*

iii)Determine a derivada da função inversa $g = f^{-1}$ em $f(-2)$.

Exerc 3.13.23. *Sendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg}(2x) & se \quad x \neq 0 \\ \\ 0 \quad se \quad x = 0 \end{cases}$$

i) Estude a função f do ponto de vista da continuidade. Analise a existência de derivada em $x = 0$

ii) Defina a função derivada de f.

iii) Escreva o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de $x - 1$ associado à função f.

Exerc 3.13.24. *Sendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(\frac{1}{x^2}) & se \quad x \neq 0 \\ \\ 0 \quad se \quad x = 0 \end{cases}$$

i) Estude a função f do ponto de vista da continuidade. Analise a existência de derivada em $x = 0$.

ii) Defina a função derivada de f.

iii) Escreva o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de $x - 1$ associado à função f.

Exerc 3.13.25. *Sendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(1 + \frac{1}{x}) & se \quad |x| > 1 \\ \\ 0 \quad se \quad |x| \leq 1 \end{cases}$$

i) Estude a função f do ponto de vista da continuidade.

ii) Defina a função derivada de f.

iii) Escreva o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de $x-2$ associado à função f.

Exerc 3.13.26. *Determine se existirem os seguintes limites*

i) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x\ln(x)}$ *ii)* $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\cos x)}{x}$ *iii)* $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{tg} x}$

iv) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ *v)* $\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \ln x$ *vi)* $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\, \dfrac{\sqrt{2x}+1}{1+2\sqrt{2x^2+1}}$

Exerc 3.13.27. *Determine se existirem os seguintes limites*

i) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$ *ii)* $\lim_{x\to +\infty} (\frac{1}{x})^{\frac{2}{x}}$ *iii)* $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

iv) $\lim_{x\to 0^+} (x)^{2x}$ *v)* $\lim_{x\to 0^+} (x)^{\operatorname{sen} x}$ *vi)* $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{tg} x)^x$

Exerc 3.13.28. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto que contém 0 e 1 e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em I e tal que para todo o $n \in \mathbb{N}$*

$$f(\frac{1}{n}) = 3 - \frac{1}{n^2}$$

Determine $f(0)$ e mostre que $[2,3] \subset f(I)$.

Exerc 3.13.29. *Mostre que a equação*

$$3x^2 - \mathrm{e}^x = 0.$$

tem exactamente três soluções em $\mathbb{R}$.

Exerc 3.13.30. *A equação polinomial em $\mathbb{R}$*

$$x^3 + px + q = 0.$$

em que $p, q \in \mathbb{R}$ e $p > 0$ tem mais que uma solução em $\mathbb{R}$? Justifique.

Exerc 3.13.31. *Mostre, através do teorema de Lagrange, que para $x \in [0, +\infty[$*

$$\frac{x}{1+x^2} \le \operatorname{arctg} x$$

Exerc 3.13.32. *Seja* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *com derivada* f' *que é uma função contínua em* $[a,b]$*, diferenciável em* $]a,b[$ *com derivada não nula. Mostre que existem* $\xi_1, \xi_2 \in]a,b[$ *e* $c \in]\xi_1, \xi_2[$ *tais que*

$$f''(c)[f(\xi_2) - f(\xi_1)] = f'(c)[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)]$$

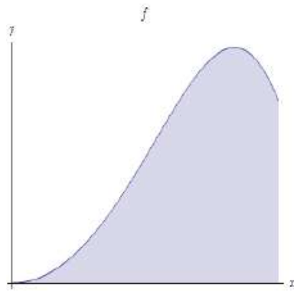
Capítulo 4

Integral de Riemann

Os principais resultados da teoria do integral de Riemann para funções limitadas definidas em $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ são apresentados neste capítulo.
Definem-se, no sentido de Riemann, o integral definido e funções integráveis. Indicam-se exemplos da determinação do integral recorrendo à definição. Estabelecem-se critérios de integrabilidade. Conclui-se que as funções limitadas que sejam monótonas e as funções limitadas que sejam contínuas são integráveis. Indicam-se as principais propriedades do integral definido. Demonstra-se o teorema fundamental do cálculo integral. Introduz-se a noção de integral indefinido e estabelece-se a fórmula de Barrow. Indicam-se métodos gerais de integração: Integração por partes, Integração por substituição. Analisa-se a integração de funções racionais. Indicam-se procedimentos para a integração de funções irracionais e de funções trigonométricas.

4.1 Definição do integral de Riemann

Considere-se o problema de determinar a área sombreada da figura



A

em que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e

$$A = \{(x, y) : \ a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

O problema formulado suscita 3 questões que se associam aos três tópicos centrais da teoria do integral de Riemann

• O que se entende por área da região limitada A ?
Como se define o integral de Riemann?

• Qual a classe de funções para as quais a definição de integral faz sentido? Como caracterizar as funções integráveis?

• Como determinar a área?
O que estabelece o teorema fundamental do cálculo integral? Quais os métodos de integração?

Nesta secção vai-se abordar a primeira questão formulada: Como se define o integral de Riemann. Tendo por objectivo a determinação da área da região A uma ideia natural é recorrer a aproximações por excesso e por defeito, recorrendo a áreas de rectângulos e melhorando essas aproximações, aumentando o número de rectângulos. Num certo sentido é esta a ideia que está na base da definição do integral de Riemann.

Definição 4.1.33. *Seja $I = [a, b]$. Chama-se decomposição do intervalo I a um conjunto finito de pontos interiores de I*

$$d = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$$

em que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Definição 4.1.34 (Somas de Darboux)**.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função limitada e d uma decomposição de $I = [a, b]$. Designa-se por:*
• *soma inferior de Darboux de f relativa à decomposição d*

$$\sum_{k=1}^{n} m_k.(x_k - x_{k-1}) = s_d = s(f, d)$$

em que

$$m_k = \inf\{f(x) : \ x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

• *soma superior de Darboux de f relativa à decomposição d*

$$\sum_{k=1}^{n} M_k.(x_k - x_{k-1}) = S_d = S(f, d)$$

em que

$$M_k = \sup\{f(x): \ x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

Proposição 4.1.35. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e S_d, s_d as somas superior e inferior de Darboux relativas à decomposição d, então*

$$s_d \leq S_d$$

Demonstração. Evidente, pois $m_k \leq M_k$ ■

Definição 4.1.36. *Sendo d, d' duas decomposições de I diz-se que d' é uma decomposição mais fina que a decomposição d se*

$$d \subset d'$$

Cada decomposição $d = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ com $n-1$ pontos decompõe o intervalo I em n subintervalos $[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Em particular se $n = 1$ o subintervalo único coincide com I e as somas superiores e inferiores são

$$M(b-a) \qquad \text{e} \qquad m(b-a)$$

em que M e m são, respectivamente o supremo e o infimo da função em I.

Proposição 4.1.37. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, S_d, s_d as somas superior e inferior de Darboux relativas à decomposição d, e $S_{d'}$, $s_{d'}$, as somas superior e inferior de Darboux relativas à decomposição d' mais fina que d. Então*

$$s_d \leq s_{d'} \leq S_{d'} \leq S_d$$

Demonstração. Faz-se a demonstração quando d' tem mais um ponto que d já que no caso geral se pode sempre supor que a passagem de d para d' é realizada por etapas sucessivas.
Seja $x'_1 \in d' \setminus d$ tal que $x'_1 \in]x_0, x_1[$. Sendo M'_1 e M''_1, respectivamente, os supremos de f em $[x_0, x'_1]$ e $[x'_1, x_1]$ e M_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, os supremos de f em $[x_{i-1}, x_i]$

$$M'_1 \leq M_1 \quad \text{e} \quad M''_1 \leq M_1$$

Vindo

$$M'_1(x'_1 - x_0) + M''_1(x_1 - x'_1) \leq M_1(x'_1 - x_0) + M_1(x_1 - x'_1) = M_1(x_1 - x_0)$$

e

$$M'_1(x'_1 - x_0) + M''_1(x_1 - x'_1) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1}) \leq$$

$$\leq M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1})$$

Concluindo-se que

$$S_{d'} \leq S_d \ .$$

De forma análoga se demonstraria que $s_d \leq s_{d'}$ o que atendendo a que $s_{d'} \leq S_{d'}$ termina a demonstração ■

Proposição 4.1.38. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, d' e d'' duas decomposições quaisquer de I, $S_{d'}$ a soma superior relativa a d' e $s_{d''}$ a soma inferior relativa a d''. Então*

$$s_{d''} \leq S_{d'}$$

Demonstração. Seja $d = d' \cup d''$ a decomposição sobreposta a d' e d''. Como a decomposição sobreposta a duas decomposições arbitrárias d' e d'' é sempre mais fina que qualquer delas

$$s_{d''} \leq s_d \leq S_d \leq S_{d'}$$

■

Sendo f uma função limitada em $I = [a,b]$ e $\mathcal{D}(I)$ o conjunto de todas as decomposições de I, designe-se por

$$\Sigma = \{S(f,d)\}_{d \in \mathcal{D}(I)}$$

o conjunto formado pelas somas superiores de f relativas a todas as decomposições de I e por

$$\sigma = \{s(f,d)\}_{d \in \mathcal{D}(I)}$$

o conjunto formado pelas somas inferiores de f relativas a todas as decomposições de I.

A proposição 4.1.37 permite concluir que Σ tem um elemento máximo e σ um elemento minimo os quais são respectivamente as somas superior e inferior $M(b-a)$ e $m(b-a)$ relativas à decomposição vazia. Por outro lado a proposição 4.1.38 mostra que qualquer elemento de σ é menor ou igual a qualquer elemento de Σ. Assim Σ e σ são conjuntos limitados com infimo e supremo em $\mathbb{R}$ (note-se que a decomposição de I tem um número finito de elementos mas que o conjunto de todas as decomposições é infinito).

Definição 4.1.39. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Designa-se por:*

- *Integral superior de Darboux de f em $I = [a,b]$*

$$S = I_s(f) = \inf\{S_d : \ d \in \mathcal{D}(I)\} = \overline{\int_I} f = \overline{\int_a^b} f$$

ínfimo do conjunto das somas superiores de f relativas a todas as decomposições de I.

- *Integral inferior de Darboux de f em $I = [a, b]$*

$$s = I_i(f) = \sup\{s_d : \ d \in \mathcal{D}(I)\} = \underline{\int_I} f = \underline{\int_a^b} f$$

supremo do conjunto das somas inferiores de f relativas a todas as decomposições de I.

Se $I_i(f) = I_s(f)$ a função diz-se integrável no sentido de Riemann em $[a, b]$ e designa-se por integral definido de f em $[a, b]$ ao valor comum destes dois integrais

$$\int_a^b f = I_i(f) = I_s(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Exemplo 4.1.40. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = C$ =constante. Analise-se se f é integrável em $[a, b]$*

Qualquer que seja a decomposição de $[a, b]$ tem-se $M_k = m_k = C$. Assim

$$s_d = \sum_{k=1}^{n} \ m_k.(x_k - x_{k-1}) = C \sum_{k=1}^{n} \ (x_k - x_{k-1}) = C(b - a)$$

e analogamente

$$S_d = C(b - a).$$

Concluindo-se que Σ e σ são conjuntos singulares com um único elemento $C(b - a)$. Tem-se pois que f é integrável em $[a, b]$ e

$$\overline{\int_a^b} C\,dx = \underline{\int_a^b} C\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = C(b - a)$$

Exemplo 4.1.41. *Seja a função de Dirichlet $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$D(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & se \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Verifique que D não é integrável em $[a, b]$.

Qualquer que seja a decomposição de $[a, b]$ e qualquer que seja o intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ tem-se $M_k = 1$ e $m_k = 0$. Assim

$$s_d = \sum_{k=1}^{n} m_k.(x_k - x_{k-1}) = 0 \Rightarrow \sigma = \{0\}$$

$$S_d = \sum_{k=1}^{n} M_k.(x_k - x_{k-1}) = b - a \Rightarrow \Sigma = \{b - a\}$$

Concluindo-se que a função f não é integrável pois

$$b - a = \overline{\int_a^b} D(x)\, dx \neq \underline{\int_a^b} D(x)\, dx = 0$$

4.2 Critérios de integrabilidade

Teorema 4.2.1 (Critério de integrabilidade de Riemann)**.** *Uma condição necessária e suficiente para que a função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ seja integrável em $[a, b]$ é que*

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{d\in\mathcal{D}(I)}{\exists}\ S_d - s_d < \epsilon$$

Demonstração.
Comece-se por demonstrar que a condição é suficiente.
Admita-se que f não é integrável i.e.

$$S > s$$

e seja $0 < \epsilon \leq S - s$. Então para qualquer decomposição $d \in \mathcal{D}(I)$ tem-se

$$\epsilon \leq S - s \leq S_d - s_d$$

pois $S_d \geq S$ e $s_d \leq s$ já que S é o infimo de Σ e s é o supremo de σ.

Demonstre-se que a condição é necessária.
Seja f integrável i.e. $S = s$.
Por definição de supremo e infimo qualquer que seja $\epsilon > 0$ existem necessariamente decomposições d' e d'' tais que

$$S_{d'} < S + \epsilon/2 \qquad \text{e} \qquad s_{d''} > s - \epsilon/2$$

Assim designando por d a decomposição sobreposta a d' e d'' $(d = d' \cup d'')$ tem-se

$$S_d < S + \epsilon/2 \qquad \text{e} \qquad s_d > s - \epsilon/2$$

e portanto, sendo f integrável, conclui-se que

$$S_d - s_d < S + \epsilon/2 - s + \epsilon/2 = \epsilon$$

■

Corolário 4.2.2. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Se existir uma sucessão de decomposições d_n de I tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} (S_{d_n} - s_{d_n}) = 0 \tag{4.2.1}$$

então f é uma função integrável e

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} S_{d_n} = \lim_{n\to+\infty} s_{d_n}$$

Demonstração. Da condição (4.2.1) qualquer que seja $\epsilon > 0$ existe N tal que para $n > N$

$$S_{d_n} - s_{d_n} < \epsilon$$

Assim do teorema 4.2.1 conclui-se que f é integrável. Além disso S_{d_n} é uma sucessão decrescente e minorada consequentemente com limite. ■

Corolário 4.2.3. *Para que a função f seja integrável em $I = [a, b]$ e*

$$\int_a^b f(x)\, dx = k$$

é condição necessária e suficiente que para qualquer $\epsilon > 0$ exista uma decomposição d de I tal que $S_d, s_d \in V_\epsilon(k)$.

Demonstração. (*)

Demonstre-se a condição necessária.

Sendo $\int_a^b f(x)\, dx = k$ qualquer que seja a decomposição d que verifique $S_d - s_d < \epsilon$, tal decomposição existe de acordo com o teorema anterior, ter-se-á

$$k \geq s_d > S_d - \epsilon \geq k - \epsilon \quad \text{e} \quad k \leq S_d < s_d + \epsilon \leq k + \epsilon$$

Concluindo-se assim que

$$S_d, s_d \in V_\epsilon(k)$$

Demonstre-se agora a condição suficiente.

Se para qualquer $\epsilon > 0$ existe uma decomposição d tal que $S_d, s_d \in V_\epsilon(k)$, tem-se

$$S_d < k + \epsilon \qquad \text{e} \qquad s_d > k - \epsilon$$

concluindo-se que para qualquer $\epsilon > 0$ existe d tal que $S_d - s_d < 2\epsilon$ e que f é integrável.
Por outro lado se o integral tiver um valor diferente de k, por exemplo, se $S = s > k$ nenhuma soma superior pertenceria a $V_\epsilon(k)$ desde que $\epsilon \leq S - k$ visto que todas as somas superiores são maiores ou iguais a S concluindo-se assim que o valor do integral é k (se $S = s < k$ o raciocínio é analogo).
■

Exemplo 4.2.4. *Sendo $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, analise-se se a função é integrável em $[0,1]$ e em caso afirmativo determine-se $\int_0^1 f(x)\,dx$.*

Considere-se a sucessão

$$d_1 = \emptyset, d_2 = \{\frac{1}{2}\}, d_3 = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}, \qquad \ldots, \qquad d_n = \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\}$$

Tem-se $[x_{k-1}, x_k] = [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ e como f é crescente neste intervalo tem-se

$$m_k = \frac{k-1}{n} \quad \text{e} \quad M_k = \frac{k}{n}$$

Assim

$$s_{d_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}.(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}$$

e

$$S_{d_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}.(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$$

concluindo-se que f é integrável pois

$$S_{d_n} - s_{d_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Quanto ao integral

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\frac{n+1}{2}n = \frac{1}{2}$$

4.3 Integrabilidade de funções monótonas e contínuas

Teorema 4.3.1. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona e limitada. Então f é uma função integrável em $[a,b]$.*

Demonstração.

Se $f(a) = f(b)$ a função f é constante em $[a,b]$ e é evidentemente integrável. Considere-se $f(a) < f(b)$ e consequentemente a função f crescente (se fosse decrescente a demonstração seria análoga).

Seja $d_n = \{x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_{n-1}\}$ uma decomposição que subdivide $[a,b]$ em n subintervalos iguais

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$$

Sendo f crescente

$$m_k = f(x_{k-1}) \quad \text{e} \quad M_k = f(x_k)$$

e portanto

$$S_{d_n} - s_{d_n} = \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right)(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right) = \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right)$$

Tem-se assim

$$\lim_{n\to+\infty}(S_{d_n} - s_{d_n}) = 0$$

concluindo-se que f é integrável.

■

Observação 4.3.2. *O teorema anterior é generalizável a funções seccionamente monótonas e limitadas.*

Exemplo 4.3.3. *Analise-se se é integrável a função* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x = 0 \\ \\ \frac{1}{k} & se \quad x \in]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}], \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$ [1]

Considere-se a partição $P_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n})$. Tem-se

$$S(f, P_n) = \frac{M_0}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$$

[1] função monótona com um número infinito de pontos de descontinuidade .

e

$$s(f,P_n) = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \quad \frac{1}{k}.(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$$

Assim

$$\lim_{n\to+\infty}(S_{d_n} - s_{d_n}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2} = 0$$

Conclui-se pois, que f é integrável, apesar de ter uma infinidade de descontinuidades.

Teorema 4.3.4. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função limitada e contínua em $I = [a,b]$. Então f é uma função integrável em I.*

Demonstração. (*) A função f é uniformemente contínua [2] em $I = [a,b]$ (toda a função contínua num intervalo limitado e fechado é uniformemente contínua nesse intervalo). Assim dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $|x - y| < \delta$ se tem $|f(x) - f(y)| < \epsilon/(b-a)$ para $x, y \in I$.
Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $(b-a)/n < \delta$ e $d_n = \{x_1, \dots, x_k, \dots, x_{n-1}\}$ uma decomposição que subdivide $[a,b]$ em n subintervalos iguais

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} < \delta \qquad .$$

Pelo teorema de Weierstrass existem $v_k, w_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tais que $m_k = f(v_k)$ e $M_k = f(w_k)$ por conseguinte

$$M_k - m_k = f(v_k) - f(w_{k-1}) < \epsilon/(b-a)$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \epsilon$$

concluindo-se que f é integrável.

■

Observação 4.3.5. *O teorema 4.3.4 generaliza-se para funções limitadas com um conjunto de pontos de descontinuidade contável.*

[2] Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ diz-se uniformemente contínua em $I = [a,b]$ se

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x,t\in I}{\forall}\ |x - t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \epsilon$$

Analise-se de seguida as principais propriedades do integral definido

Teorema 4.3.6. *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis em $I = [a, b]$ e c uma constante real. Então*

i) $f + g$ é uma função integrável e

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$$

ii) $c.f$ é uma função integrável e

$$\int_I (c.f) = c. \int_I f \, .$$

Demonstração. (*) Sendo

$$\int_I f = \alpha \quad \text{e} \quad \int_I g = \beta$$

qualquer que seja $\epsilon > 0$ existem decomposições d_1, d_2 tais que

$$S'_{d_1},\, s'_{d_1} \in V_{\epsilon/2}(\alpha), \qquad\qquad S'_{d_2},\, s'_{d_2} \in V_{\epsilon/2}(\beta)$$

Tem-se então

$$S'_d,\, s'_d \in V_{\epsilon/2}(\alpha) \Leftrightarrow \alpha - \epsilon/2 < s'_d \leq \alpha \leq S'_d < \alpha + \epsilon/2$$

$$S''_d,\, s''_d \in V_{\epsilon/2}(\beta) \Leftrightarrow \beta - \epsilon/2 < s''_d \leq \beta \leq S''_d < \beta + \epsilon/2$$

Assim

$$s'_d + s''_d \in V_\epsilon(\alpha + \beta) \quad \text{e} \quad S'_d + S''_d \in V_\epsilon(\alpha + \beta).$$

Considerando a decomposição sobreposta $d = d_1 \cup d_2$ designe-se por M'_k, M''_k, M_k, m'_k, m''_k, m_k os supremos e infimos das funções f, g e $f + g$ em $[x_{k-1}, x_k]$ e conclua-se que $s_d, S_d \in V_\epsilon(\alpha + \beta)$.
Tem-se

$$m_k \geq m'_k + m''_k \qquad\qquad M_k \leq M'_k + M''_K$$

Assim

$$s_d = \sum_{k=1}^{n} m_k.(x_k - x_{k-1}) \geq \sum_{k=1}^{n} m'_k.(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} m''_k.(x_k - x_{k-1})$$

e

$$S_d = \sum_{k=1}^{n} M_k.(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} M'_k.(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} M''_k.(x_k - x_{k-1})$$

tendo-se finalmente

$$s'_d + s''_d \leq s_d \leq S_d \leq S'_d + S''_d \quad .$$

Assim

$$s_d, S_d \in V_\epsilon(\alpha + \beta)$$

o que permite do corolário 4.2.3 obter a proposição i).
Análogamente se demonstra a proposição ii). ■

Observação 4.3.7.

- $$\int_a^a f \; = 0$$

- *Se* $b < a$ *tem-se* $$\int_a^b f \; = -\int_b^a f.$$

Teorema 4.3.8. *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$.

i) Se f *é integrável em* $I = [a, b]$ *é também integrável em qualquer intervalo não degenerado* $J \subset I$ *e para qualquer* $c \in]a, b[$

$$\int_a^b f \; = \int_a^c f \; + \int_c^b f.$$

ii) Se f *é uma função integrável em* $[a, c]$ *e em* $[c, b]$ *então* f *é uma função integrável em* $[a, b]$ *e*

$$\int_a^c f \; + \int_c^b f \; = \int_a^b f \, .$$

Demonstração. (*)

i) Sendo f uma função integrável em $I = [a, b]$ e $c \in]a, b[$, demonstre-se que f é integrável em $J = [a, c]$.
Atendendo ao critério de integrabilidade de Riemann, teorema 4.2.1, considere-se $\epsilon > 0$ e determine-se uma decomposição $d_1 \in \mathcal{D}(I)$ tal que $S_{d_1} - s_{d_1} < \epsilon$. Sendo $d_2 = d_1 \cup \{c\}$ uma decomposição mais fina que a decomposição d_1 tem-se também $S_{d_2} - s_{d_2} < \epsilon$. Considere-se então a decomposição do intervalo J, $d = d_2 \cap]a, c[$, e mostre-se que

$$S_d - s_d \leq S_{d_2} - s_{d_2} \tag{4.3.1}$$

em que S_d, s_d são as somas superior e inferior relativas a d.
Sendo $d = \{x_1, \ldots, x_{m-1}\}$ e $d_2 = \{x_1, \ldots x_m, \ldots, x_{n-1}\}$, onde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = c < x_{m+1} < \ldots < x_n = b$ tem-se

$$S_{d_2} - s_{d_2} = S_d - s_d + \sum_{k=m+1}^{n} (M_k - m_k).(x_k - x_{k-1})$$

Uma vez que as parcelas do somatório da igualdade anterior são não negativas, tem-se (4.3.1), concluindo-se que $S_d - s_d < \epsilon$, e do teorema 4.2.1, a integrabilidade da função f em $J = [a, c]$.
Analogamente se prova a integrabilidade da função f em $J = [c, b]$ e consequentemente em qualquer intervalo $J = [c, d]$, com $a < c < d < b$.

ii) Sendo $\alpha = \int_a^c f$ e $\beta = \int_c^b f$, do critério de integrabilidade de Riemann, teorema 4.2.1, existem decomposições $d_1 \in \mathcal{D}([a, c])$ e $d_2 \in \mathcal{D}([c, b])$ tais que

$$\alpha - \epsilon/2 < s_{d_1} \leq \alpha \leq S_{d_1} < \alpha + \epsilon/2$$

e

$$\beta - \epsilon/2 < s_{d_2} \leq \beta \leq S_{d_2} < \beta + \epsilon/2$$

Designando por d a decomposição de $[a, b]$, definida por $d = d_1 \cup \{c\} \cup d_2$ tem-se

$$\alpha + \beta - \epsilon < s_d \leq \alpha + \beta \leq S_d < \alpha + \beta + \epsilon$$

concluindo-se que f é integrável em $[a, b]$ e que $\alpha + \beta = \int_a^b f$.

■

Como consequências do teorema anterior tem-se

Observação 4.3.9. • *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $I = [a, b]$ e $c_1, c_2, \ldots, c_n \in [a, b]$ então*

$$\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \ldots + \int_{c_n}^b f\,.$$

• *Se f é integrável em $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$, ..., $[c_n, b]$ então f é integrável em $[a, b]$ tendo-se*

$$\int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \ldots + \int_{c_n}^b f = \int_a^b f\,.$$

Teorema 4.3.10. *Sejam f, g funções integráveis em $I = [a, b]$*

i) Se $f(x) \geq 0,\ \ x \in I$ então

$$\int_a^b f \geq 0$$

ii) Se $f(x) \geq g(x), \;\; x \in I$ *então*

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g$$

iii) Se f *é integrável então* $|f|$ *também é integrável e*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Demonstração.

i) Sendo $m \geq 0$ o infimo da função em $I = [a, b]$ tem-se $\int_a^b f \geq m(b-a) \geq 0$

ii) Se $f(x) \geq g(x), \;\; x \in I$ tem-se $f(x) - g(x) \geq 0$ e então $\int_a^b (f - g) \geq 0$

iii) Sendo $\overline{M}_k, \overline{m}_k$ o supremo e infimo de $|f|$ em $[x_{k-1}, x_k]$

$\overline{M}_k - \overline{m}_k = \sup\{||f(x)| - |f(t)||\,, \;\; x, t \in I_k\} \leq \sup\{|f(x) - f(t)|, \;\; x, t \in I_k\}$

$$\overline{M}_k - \overline{m}_k \leq M_k - m_k$$

Assim

$$\overline{S}_d - \overline{s}_d \leq S_d - s_d$$

concluindo-se que $|f|$ é integrável.
Por outro lado tem-se

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

vindo

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

e

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

■

Observação 4.3.11. *Quando a função* $|f|$ *é integrável não se pode concluir que* f *seja integrável. Por exemplo a função*

$$f(x) = \begin{cases} C & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ -C & se \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

não é integrável mas a função $|f|$ *é integrável.*

4.4 Teorema fundamental do cálculo integral. Fórmula de Barrow

A diferenciação e a integração são dois dos tópicos mais importantes em Análise. O primeiro é um processo local, uma vez que a derivada depende apenas dos valores da função numa vizinhança do ponto, o segundo é um processo global no sentido de que o integral de uma função depende dos seus valores num intervalo. À primeira vista pareceria não existir qualquer relação entre estes dois tópicos, contudo o teorema fundamental do cálculo integral mostra o contrário.

Sendo a função $f : I \to \mathbb{R}$ integrável em $I = [a, b]$ o teorema 4.3.8 permite concluir que existe

$$\int_a^c f(t)\, dt, \qquad\qquad c \in [a, b]$$

Definição 4.4.1. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Designa-se por integral indefinido de f em $I = [a, b]$ a função $F : I \to \mathbb{R}$*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

Teorema 4.4.2. *(1º Teorema Fundamental do Cálculo Integral)*
Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $I = [a, b]$. Então

i) A função integral indefinido de f, F, é contínua em I.

ii) Se f é contínua em $c \in]a, b[$, a função integral indefinido de f, F, é diferenciável em c e

$$F'(c) = f(c)$$

Demonstração.

i) Mostre-se que F é contínua em I, i.e. que sendo $c \in [a, b]$

$$\underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{\epsilon>0}{\exists} :\ x \in I\,,\ |x - c| < \epsilon \Rightarrow |F(x) - F(c)| < \delta \tag{4.4.1}$$

Tem-se para $x > c$

$$F(x) - F(c) = \int_a^x f(t)\, dt - \int_a^c f(t)\, dt = \int_c^x f(t)\, dt$$

vindo

$$|F(x) - F(c)| = \left| \int_c^x f(t)\, dt \right| \leq \int_c^x |f(t)|\, dt \leq A. \int_c^x 1\, dt = A.|x - c|$$

em que $A = \sup_{x\in I}|f(x)|$. Conclui-se assim que para qualquer $\delta > 0$, escolhendo $\epsilon = \delta/A$ se verifica (4.4.1). Analogamente quando $x < c$ se verificava (4.4.1). A função F é assim contínua em $c \in]a,b[$.

ii) Sendo f é contínua em $c \in]a,b[$

$$\underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{\epsilon>0}{\exists} :\ x \in I\,,\ |x-c| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \delta$$

Analise-se a diferencibilidade da função F em c.
Seja $h = |x - c| < \epsilon$ e analise-se

$$\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c) = \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\,dt - \frac{f(c)}{h}\int_c^{c+h} 1\,dt =$$

$$= \frac{1}{h}\int_c^{c+h} (f(t) - f(c))\,dt.$$

Tem-se

$$\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_c^{c+h} |f(t) - f(c)|\,dt \leq$$

$$\leq \frac{\delta}{|h|}\int_c^{c+h} 1\,dt = \frac{|h|}{|h|}\delta = \delta$$

Assim F é diferenciável em c e

$$F'(c) = f(c)$$

■

Definição 4.4.3. *A função $f : I \to \mathbb{R}$ diz-se primitivável em I, se existir $F : I \to \mathbb{R}$ tal que*

$$F'(x) = f(x), \qquad x \in I \quad ^3$$

F diz-se uma primitiva de f e representa-se por $\int f(t)\,dt$[4] ou por $P(f)$.

Proposição 4.4.4. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua em $I = [a,b]$ então a função integral indefinido é uma primitiva de f em I.*

---

[3] Nos pontos extremos de I a derivada é a derivada à esquerda ou à direita, consoante se trate do extremo mais à direita ou mais à esquerda de I.

[4] Muitas funções elementarmente primitiváveis não têm como primitiva uma função elementar.

Proposição 4.4.5. *Sejam F_1, F_2 duas primitivas da função f em I, então $F_1 - F_2$ é uma função constante em I.*

Demonstração. Sendo F_1, F_2 duas primitivas de f em $I = [a, b]$, $(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $x \in I$. Assim tem-se $(F_1 - F_2)(x) = C, \quad x \in I$ ■

Proposição 4.4.6. *Se a função f é primitivável em I, dados $x_1 \in I$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ existe uma e uma só primitiva F_0 de f tal que*

$$F_0(x_1) = \alpha$$

Demonstração. Sendo F uma primitiva de f em I qualquer outra primitiva em I será:

$$F_0(x) = F(x) + C$$

Escolhendo $C = \alpha - F(x_1)$ tem-se $F_0(x_1) = \alpha$. É imediato que F_0 é única, pois se existisse outra primitiva $\tilde{F}_0$ satisfazendo a mesma condição ter-se-ia $\tilde{F}_0'(x) - F_0'(x) = 0$, $x \in I$ e $\tilde{F}_0(x_1) - F_0(x_1) = 0$ permitindo o teorema de Lagrange concluir que a diferença $\tilde{F}_0 - F_0$ era identicamente nula em I. ■

Teorema 4.4.7. *(2º Teorema Fundamental do Cálculo Integral)*
Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função integrável e primitivável em $I = [a, b]$ e seja F uma primitiva. Então

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b \qquad \textit{Fórmula de Barrow} \qquad (4.4.2)$$

Demonstração. Seja uma decomposição $d = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ de I e

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} \quad (F(x_k) - F(x_{k-1}))$$

O teorema de Lagrange em $[x_{k-1}, x_k]$ permite concluir, sendo $\zeta_k \in]x_{k-1}, x_k[$, que:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} \quad F'(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \quad f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1})$$

Ora como

$$m_k \leq f(x_k) \leq M_k$$

tem-se

$$\sum_{k=1}^{n} \quad m_k(x_k - x_{k-1}) \leq F(b) - F(a) \leq \sum_{k=1}^{n} \quad M_k(x_k - x_{k-1})$$

e

$$\sup_d s(f,d) \leq F(b) - F(a) \leq \inf_d S(f,d)$$

Sendo f integrável

$$\sup_d s(f,d) = \inf_d S(f,d)$$

e

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Note-se que no caso particular de f ser contínua

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad\qquad c \in]a,b[$$

é uma primitiva de f e, de imediato

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_c^b f(t)\,dt - \int_c^a f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

■

Exemplo 4.4.8. *Aplicando a fórmula de Barrow aos integrais seguintes, tem-se:*

- $\displaystyle\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}\left[t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$
- $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} t\,dt = -\left[\cos t\right]_0^\pi = 2$
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\,dt = -\left[\cos t\right]_0^{2\pi} = 0$

4.5 Métodos gerais de integração

Teorema 4.5.1 (Integração por partes)**.** *Sejam as funções $f, g : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciáveis com funções derivadas integráveis em I. Então*

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$

Demonstração.

As funções fg' e $f'g$ são funções integráveis já que o produto de funções integráveis é integrável, por outro lado

$$h = (fg)' = f'g + fg'$$

Assim sendo primitiva de $h = (fg)'$ a função fg

$$\int_a^b h(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b = \int_a^b f'(t)g(t)\,dt + \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$

Concluindo-se que:

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$

■

Exemplo 4.5.2. *Determine-se* $\int_1^2 x \ln x\,dx$ *recorrendo ao método de integração por partes*

$$\int_1^2 x \ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x^2 \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= (2\ln 2 - 0) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \ln 4 - \frac{3}{4}$$

Exemplo 4.5.3. *Determine-se* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x\,dx$ *recorrendo ao método de integração por partes*

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x.(-\cos x)'\,dx =$$

$$= \left[-\operatorname{sen}^2 x.\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\operatorname{sen} x.\cos x(-\cos x)\,dx =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x.\cos^2 x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x\,dx$$

Sendo $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx$ tem-se

$$I_3 = 2(I_1 - I_3) \Rightarrow I_3 = \frac{2}{3}I_1$$

ora como $I_1 = 1$ conclui-se que

$$I_3 = \frac{2}{3}$$

Observação 4.5.4. *O método de integração por partes é também um método de primitivação por partes considerando f e g funções diferenciáveis com derivada contínua. De facto*

$$\int_a^x f'(t)g(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f(t)g'(t)\,dt$$

Exemplo 4.5.5. *Determine-se uma primitiva da função $f(t) = t\cos t \operatorname{sen} t$.*

$$\int_0^x t\cos t \operatorname{sen} t\,dt = \left[\frac{1}{2}t\operatorname{sen}^2 t\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \operatorname{sen}^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}x.\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\operatorname{sen}^2 x - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right)$$

Teorema 4.5.6 (Integração por substituição)**.** *Seja a função f contínua em $[a,b]$ e $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ diferenciável com derivada integrável em $[\alpha,\beta]$, tal que $a = \varphi(\alpha)$ $b = \varphi(\beta)$.*
Então a função $(f\circ\varphi).\varphi'$ é integrável em $[\alpha,\beta]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt$$

Demonstração. Seja F uma primitiva de f em $[a,b]$ e para $t\in[\alpha,\beta]$

$$h(t) = [F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t)).\varphi'(t) = f(\varphi(t)).\varphi'(t)$$

Tem-se então, sendo $F\circ\varphi$ uma primitiva de h em $[\alpha,\beta]$,

$$\int_\alpha^\beta h(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

■

Observação 4.5.7. *A função φ do enunciado do teorema 4.5.6 pode não ser bijectiva contudo na primitivação por substituição é necessário que φ seja bijectiva. É primitiva da função contínua f em $x\in[a,b]$, a função*

$$\int_a^x f(u)\,du = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Exemplo 4.5.8. *Determine-se o integral*

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

recorrendo ao método de integração por substituição.

Sendo a substituição $\varphi : [0, \pi/2] \to [0, 1]$, $\varphi(t) = \operatorname{sen} t$, $\varphi'(t) = \cos t$ tem-se

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cos t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Exemplo 4.5.9. *Determine-se o integral*

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$$

recorrendo ao método de integração por substituição.

Sendo a substituição $\varphi : [0, 1] \to [1, 2]$, $\varphi(t) = 1 + t^2$, $\varphi'(t) = 2t$ tem-se

$$2\int_0^1 \frac{\sqrt{t^2}}{1+t^2}.t\,dt = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\,dt = 2\left[t - \operatorname{arctg} t\right]_0^1 = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Exemplo 4.5.10. *Determine-se o integral*

$$\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

Recorrendo à substituição $\varphi : [1, \sqrt{2}] \to [1, 2]$, $\varphi(t) = t^2$, $\varphi'(t) = 2t$ tem-se

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+t}2t\,dt = 2\int_1^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\,dt =$$

$$= 2\left[t - \ln(1+t)\right]_1^{\sqrt{2}} = 2\left(\sqrt{2} - 1 - \ln(1+\sqrt{2}) + \ln 2\right)$$

Exemplo 4.5.11. *Determine-se uma primitiva da função* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$.

Recorrendo à substituição $u = t^2 = \varphi(t)$ tem-se

$$\int_0^x \frac{1}{1+\sqrt{u}}\,du = 2\int_0^{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\,dt$$

$$= \left[2(t - \ln(1+t))\right]_0^{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x}))$$

4.6 Integração de funções racionais

Nesta secção analisa-se a determinação de integrais quando a função integranda é uma função racional, função que é elementarmente primitivável. Associada à determinação de integrais de funções racionais inicia-se a secção com uma abordagem sucinta à decomposição de polinómios em polinómios irredutíveis e à decomposição de uma função racional em fracções simples.

A função racional p/q em que p e q são polinómios é representada por uma fracção própria se o grau do polinómio numerador for menor que o grau do polinómio denominador, e representada por uma fracção imprópria caso contrário.

Sendo p um polinómio arbitrário e q um polinómio de grau maior ou igual a um, mostra-se que existem sempre polinómios univocamente determinados r e c tais que

$$p(x) = q(x)c(x) + r(x)$$

em que o grau $r <$ grau $q \leq$ grau p.

Dividindo ambos os membros da igualdade anterior por q tem-se

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

o que atendendo a que um polinómio é imediatamente primitivável reduz a primitivação de funções racionais impróprias à primitivação de funções racionais próprias. Nesta secção consider-se-á apenas funções racionais representadas por fracções próprias.

Comece-se por analisar a decomposição de um polinómio de coeficientes reais em factores irredutiveis.

Definição 4.6.1. *Um polinómio q de coeficientes reais e de grau $n \geq 1$ é redutivel se existirem dois polinómios, q_1, q_2, ambos de grau inferior a n tais que*

$$q = q_1 . q_2$$

Diz-se irredutivel em caso contrário.

Mostra-se que:

• Nos polinómios de grau impar, os polinómios de grau 1 são irredutíveis. Os polinómios de grau superior a 1 são redutíveis (estes polinómios, q, têm limites infinitos de sinais contrários quando $x \to \pm\infty$ já que existindo $a, b \in \mathbb{R}$

tais que $q(a).q(b) < 0$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $q(c) = 0$).
• Nos polinómios de grau par, os polinómios de grau superior a 2 são redutíveis. Os polinómios de grau 2 podem ser irredutíveis ou redutíveis. Considere-se

$$q(x) = x^2 + bx + c$$

Se $b^2 - 4c \geq 0$ os polinómios são redutíveis ($q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ou $q(x) = (x-\alpha)^2$). Se $b^2 - 4c < 0$ os polinómios são irredutíveis ($q(x) = (x + b/2)^2 + (4c - b^2)/4 = (x-p)^2 + q^2$, $p, q \in \mathbb{R}$).

Um polinómio com coeficientes reais factoriza-se em:
• polinómios de grau um (com raízes simples; com raízes simples e múltiplas)
• polinómios de grau dois irredutíveis (com raízes simples; com raízes simples e múltiplas)

Analise-se de seguida a decomposição de uma função racional em fracções simples começando por definir polinómios primos entre si.

Definição 4.6.2. *Dois polinómios q_1 e q_2 são primos entre si se não existirem polinómios, $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ e $\tilde{q}$ tais que*

$$q_1 = \tilde{q}.\tilde{q}_1 \qquad\qquad q_2 = \tilde{q}.\tilde{q}_2$$

Proposição 4.6.3. *Sejam q_1 e q_2 polinómios primos entre si e p um polinómio tal que grau $p <$ grau $(q_1.q_2)$. Então existem polinómios p_1 e p_2 tais que*

$$\frac{p(x)}{q_1(x).q_2(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)}, \tag{4.6.1}$$

em que o grau $p_i <$ grau q_i, $i = 1, 2$.

Demonstração. (*) Do teorema de Bezout existem polinómios $\tilde{p}_1$ e $\tilde{p}_2$ primos entre si tais que

$$\tilde{p}_1.q_1 + \tilde{p}_2.q_2 = 1$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por $\frac{p}{q_1 q_2}$ tem-se

$$\frac{p}{q_1 q_2} = \frac{p\tilde{p}_1}{q_2} + \frac{p\tilde{p}_2}{q_1}$$

Ora,

$$p\tilde{p}_1 = h_2 q_2 + p_2 \qquad\qquad p\tilde{p}_2 = h_1 q_1 + p_1$$

em que h_i, p_i, $i = 1, 2$ são polinómios e grau $p_i <$ grau q_i.
Assim

$$\frac{p}{q_1 q_2} = \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_1}{q_1} + h_1 + h_2$$

o que atendendo a que grau $(q_2.q_1) >$ grau p conduz a (4.6.1) $\blacksquare$

Exemplo 4.6.4. *Determine-se o integral*

$$\int_2^3 \frac{4x^2+x+1}{x^3-x}\,dx$$

Seja

$$f : \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{4x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

em que

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ B-C=1 \\ -A=1 \end{cases}$$

De facto usando o princípio da identidade de polinómios

$$4x^2+x+1 = (A+B+C)x^2 + (B-C)x - A$$

Assim

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

e

$$\int_2^3 f(x)\,dx = [-\ln|x| + 3\ln|x-1| + 2\ln|x+1|]_2^3 = -3\ln 3 + 8\ln 2.$$

Proposição 4.6.5. *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e p, q_1 polinómios tais que grau $p <$ $n+$grau q_1 e $q_1(a) \neq 0$. Então*

$$\frac{p(x)}{q_1(x)(x-a)^n} = \frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_n}{x-a} + \frac{p_1(x)}{q_1(x)},$$

em que grau $p_1 <$grau q_1 e

$$A_k = \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{p}{q_1}\right)^{(k-1)}(a) \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

Demonstração. (*)

Seja $q_1(x) = 1$ e consequentemente grau p$\leq$ $n-1$.

A fórmula de Taylor para o polinómio p relativamente a $x = a$ tem resto nulo e

$$p(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{p^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

Tem-se assim

$$\frac{p(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_n}{x-a}$$

em que $A_k = \frac{1}{(k-1)!}p^{(k-1)}(a)$.

Seja $q_1(x) \neq 1$. Tem-se neste caso

$$\frac{p(x)}{q_1(x)} = A_1 + A_2(x-a) + \ldots + A_n(x-a)^{n-1} + \frac{1}{n!}\left(\frac{p}{q_1}\right)^{(n)}(\xi)(x-a)^n$$

em que $\xi \in]0, x[$ e $A_k = \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{p}{q_1}\right)^{(k-1)}(a)$. Assim

$$\frac{p(x)}{q_1(x)(x-a)^n} = \frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_n}{x-a} + R(x)$$

em que R é uma função racional cujo denominador não se anula em a. ■

Exemplo 4.6.6. *Determine-se o integral*

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{x(x+1)^3}\,dx$$

Seja

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{4x+1}{x(x+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{A_3}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_1}{(x+1)^3}$$

em que

$$\begin{cases} A + A_3 = 0 \\ \\ 3A + 2A_3 + A_2 = 0 \\ \\ 3A + A_3 + A_2 + A_1 = 4 \\ \\ A = 1 \end{cases}$$

Note-se que as constantes A_1, A_2, A_3 podem ser determinadas resolvendo o sistema anterior ou recorrendo à fórmula

$$A_k = \frac{1}{(k-1)!}\left(4+\frac{1}{x}\right)^{(k-1)}_{x=-1}, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Recorrendo à fórmula anterior tem-se

$$A_1 = 4-1 = 3, \quad A_2 = \left(-\frac{1}{x^2}\right)_{x=-1} = -1, \quad A_3 = \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{x^2}\right)'_{x=-1} = \left(\frac{1}{x^3}\right)_{x=-1} = -1.$$

Assim

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x+1)^3}$$

e

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \left[\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{(x+1)} + \frac{3}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\right]_1^2 = \ln(4/3) - \frac{9}{24}$$

Na integração de funções racionais é central a decomposição em fracções simples. Vai-se estabelecer em seguida um resultado que contém como casos particulares os anteriores.

Teorema 4.6.7 (Decomposição em fracções simples)**.** *Sejam p, q polinómios tais que grau $p <$ grau q. A função racional p/q é a soma de um número finito de fracções simples da forma*

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \qquad \frac{B_1 x + B_2}{((x-p)^2+q^2)^m}$$

em que $n, m \in \mathbb{N}\,;\ A, B_1, B_2 \in \mathbb{R}\,;\ a, p, q \in \mathbb{R}$.

Demonstração. (*) A função racional p/q é decomponível, da proposição 4.6.3, numa soma de parcelas em que q_i, $i = 1, \ldots, n$, são factores irredutíveis tais que grau $p_i <$ grau q_i

$$\frac{p(x)}{q_1(x)\ldots q_{n-1}(x)q_n(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \ldots + \frac{p_{n-1}(x)}{q_{n-1}(x)} + \frac{p_n(x)}{q_n(x)}$$

As parcelas da igualdade anterior são da forma

$$\text{(i)}\ \frac{p_1(x)}{(x-a)^n}, \qquad a \in \mathbb{R} \qquad \text{(ii)}\ \frac{\tilde{p}_1(x)}{q^m(x)}, \qquad q(x) = (x-p)^2 + q^2, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

em que $p_1, \tilde{p}_1$ são polinómios. A decomposição das parcelas da forma (i) foi analisada na proposição 4.6.5, quanto a (ii) tem-se

$$\frac{p_1(x)}{q^m(x)} = \frac{B_1 x + C_1}{q^m(x)} + \frac{B_2 x + C_2}{q^{m-1}(x)} + \ldots + \frac{B_m x + C_m}{q(x)}$$

igualdade estabelecida por recorrência a partir das igualdades

$$p_1(x) = q_1(x)q(x) + c_0(x) \qquad\qquad q_1(x) = q_2(x)q(x) + c_1(x)$$

em que q_1, c_0, q_2, c_1 são polinómios que se obtêm de divisões inteiras. [5] ■

Exemplo 4.6.8. *Determine-se o integral*

$$\int_2^3 \frac{x+2}{x^3-1}\, dx$$

Seja

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{x+2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

em que

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B + C = 1 \\ A - C = 2 \end{cases}$$

uma vez que do princípio da identidade de polinómios

$$x + 2 = (A+B)x^2 + (A - B + C)x + A - C\ .$$

Tem-se assim

$$\int_2^3 f(x)\, dx = \int_2^3 \frac{1}{x-1}\, dx - \int_2^3 \frac{x+1}{x^2+x+1}\, dx$$

Como o primeiro integral é imediato analise-se apenas a determinação do segundo integral. Tem-se

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{x+1}{(x+1/2)^2+3/4} = \frac{x+1}{(x-p)^2+q^2}$$

[5] Não existe fórmula para as constantes correspondentes às raízes complexas se existir contudo só um factor desse tipo pode obter-se fazendo a diferença com os factores associados às raízes reais.

em que $p = -1/2, q = \sqrt{3}/2$. Ora recorrendo ao método de substituição para $x = \varphi(t) = p + qt = -1/2 + \sqrt{3}t/2$, $\varphi'(t) = \sqrt{3}/2$ tem-se

$$\Phi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{2}.\frac{2t}{1+t^2}$$

concluindo-se que

$$\Phi(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$$

Assim, uma vez que $t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)$, tem-se

$$\int_2^3 f(x)\,dx = \left[\ln|x-1| - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}(\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}) - \frac{1}{2}\ln(1 + \frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2)\right]_2^3$$

Exemplo 4.6.9. *Determine-se o integral*

$$\int_2^3 \frac{x^4 - x^3 + 6x^2 - 4x + 7}{(x-1)(x^2+2)^2}\,dx$$

Tem-se

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 6x^2 - 4x + 7}{(x-1)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

em que

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -B + C = -1 \\ 4A + 2B - C + D = 6 \\ -2B + 2C + E - D = -4 \\ 4A - 2C - E = 7 \end{cases}$$

uma vez que do princípio da identidade de polinómios

$$x^4 - x^3 + 6x^2 - 4x + 7 =$$

$$= (A+B)x^4 + (C-B)x^3 + (4A+2B-C+D)x^2 + (-2B+2C+E-D)x + 4A - 2C - E\ .$$

Tem-se assim

$$\int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx - \int_2^3 \frac{1}{x^2+2}\,dx + \int_2^3 \frac{x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$$

O primeiro integral é imediato. Determine-se uma primitiva com vista à determinação do segundo integral.
Tem-se

$$\int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}$$

Analise-se agora o terceiro integral.
Tem-se

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2)^2}\,dx = \int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx$$

em que

$$\int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{-1}{(x^2+2)}$$

e

$$\int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{(x^2+2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2+2-x^2}{(x^2+2)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{(x^2+2)^2}\,dx$$

e usando o método de primitivação por partes na última parcela

$$\int \frac{x^2}{(x^2+2)^2}\,dx = \int x\frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx = -\frac{x}{2}\frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx$$

obtém-se

$$\int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2} + \int \frac{1}{x^2+2}\,dx\right)$$

Assim

$$\int_2^3 f(x)\,dx = \left[\ln|x-1| - \frac{5}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{4}\frac{x+2}{x^2+2}\right]_2^3$$

Em conclusão de uma forma sucinta tem-se como método de integração das funções racionais representadas pela fracção própria p/q

(A)*Decomposição em fracções simples da função integranda.*

(Ai) São polinómios irredutíveis de coeficientes reais:

- $ax + b$, $a \neq 0$ (polinómio de 1º grau com raiz real).

- ax^2+bx+c, em que $b^2-4ac < 0$ (polinómio de 2º grau sem raizes reais).

(Aii) Qualquer polinómio $q(x)$ de coeficientes reais tem uma factorização

$$q(x) = c(x-\alpha_1)^{r_1}\ldots(x-\alpha_m)^{r_m}\left((x-p_1)^2+q_1^2\right)^{s_1}\ldots\left((x-p_m)^2+q_m^2\right)^{s_m}$$

em que $\alpha_1, \ldots,\ \alpha_m$ são raízes reais de polinómios com graus de multiplicidade $r_1, \ldots,\ r_m$ e $p_1 \pm q_1 i, \ldots,\ p_m \pm q_m i$, $p_j, q_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$ são raízes complexas de polinómios com graus de multiplicidade $s_1, \ldots,\ s_m$

$(Aiii)$ À factorização do polinómio associa-se a decomposição em fracções simples da função racional.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_{11}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2}+\ldots+\frac{A_{1r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}+\ldots+\frac{A_{m1}}{x-\alpha_m}+\frac{A_{m2}}{(x-\alpha_m)^2}\ldots+\frac{A_{mr_m}}{(x-\alpha_m)^{r_m}}+$$

$$+\frac{B_{11}x+C_{11}}{(x-p_1)^2+q_1^2}+\frac{B_{21}x+C_{21}}{\left((x-p_1)^2+q_1^2\right)^2}+\ldots+\frac{B_{s_11}x+C_{s_11}}{\left((x-p_1)^2+q_1^2\right)^{s_1}}+\ldots+$$

$$+\ldots+\frac{B_{n1}x+C_{n1}}{(x-p_n)^2+q_n^2}+\frac{B_{n2}x+C_{n2}}{\left((x-p_n)^2+q_n^2\right)^2}+\ldots+\frac{B_{ns_n}x+C_{ns_n}}{\left((x-p_n)^2+q_n^2\right)^{s_n}}.$$

(B) *Integração das fracções simples.*

$(B.i)$

$$\int \frac{A_n}{(x-a)^n}\,dx = \begin{cases} \dfrac{A_n}{(1-n)(x-a)^{n-1}} & \text{se} \quad n > 1 \\ \\ A_1 \ln|x-a| \quad \text{se} \quad n = 1 & \end{cases}$$

$(B.ii)$

$$\int \frac{B_m x + C_m}{\left((x-p)^2+q^2\right)^m}\ dx$$

Recorrendo à substituição $\varphi(t) = p + qt = x$ tem-se

$$\int \frac{B_m p + B_m qt + C_m}{((qt)^2+q^2)^m}.q\ dt = \int \frac{M_m t}{(t^2+1)^m}\ dt + \int \frac{N_n}{(t^2+1)^n}\ dt$$

em que

$$\int \frac{M_m t}{(t^2+1)^m\ dt} = \begin{cases} \dfrac{M_m}{2(1-m)(t^2+1)^{m-1}} & \text{se} \quad m>1 \\ \\ \dfrac{M_1}{2}\ln(t^2+1) \quad \text{se} \quad m=1 \end{cases}$$

e

$$\int \frac{N_m}{(t^2+1)^m}\ dt = \begin{cases} N_m \operatorname{arctg}(t) \quad \text{se} \quad m=1 \\ \\ \quad \text{fórmula de recorrência} \qquad \text{se} \quad m>1 \end{cases}$$

Note-se que se $m>1$

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^m} = \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^m} + \frac{1}{2m-2}.\frac{t}{(t^2+1)^{m-1}}.$$

sendo o resultado final obtido aplicando $m-1$ vezes a primitivação por partes até obter primitiva de $\dfrac{1}{t^2+1}$.

(C) Aplicação da propriedade da linearidade dos integrais.

4.7 Integração de funções irracionais e de funções trigonométricas

Comece-se por analisar a integração de classes de funções irracionais. Considerem-se as classes de funções:

$$\text{(i)} \quad R\left(x, \left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\text{(ii)} \quad R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$$

em que $R(x,y)$ representa uma função racional separadamente em cada uma das variáveis x e y.

(i) Seja o integral

$$I=\int_{x_1}^{x_2} R\left(x,\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\,dx$$

A substituição

$$\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}=t\Rightarrow x=\frac{\alpha-\beta t^2}{1-t^2}=\varphi(t)\quad \text{e}\quad \varphi'(t)=\frac{2(\alpha-\beta)t}{(1-t^2)^2}$$

permite reduzir a determinação do integral I à determinação de um integral cuja função integranda é uma função racional.

$$I=2(\alpha-\beta)\int_{\varphi^{-1}(x_1)}^{\varphi^{-1}(x_2)} R\left(\frac{\alpha-\beta t^2}{1-t^2},t\right)\frac{t}{(1-t^2)^2}\,dt$$

Exemplo 4.7.1. *Determine-se o integral*

$$\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{7}{4}}\frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\,dx$$

Considere-se

$$\left(\frac{2-x}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}}=t\Rightarrow x=\frac{2t^2+1}{1+t^2}=\varphi(t)\quad \text{e}\quad \varphi'(t)=\frac{2t}{(1+t^2)^2}$$

Tem-se

$$\int\frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\,dx=\int\left(\frac{2-x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2-x}\,dx$$

Ora

$$\int\frac{1}{t}.\frac{1}{2-\varphi(t)}\frac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt=2\int\frac{1}{(1+t^2)}\,dt=2\operatorname{arctg}t+C$$

Assim

$$\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{7}{4}}\frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\,dx==[2\operatorname{arctg}t]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}$$

(ii) Seja o integral

$$I=\int_{x_1}^{x_2} R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx$$

• Se $b^2-4ac>0$
O trinómio ax^2+bx+c tem duas raízes reais α,β e é aplicável o procedimento anterior já que

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}\,(x-\beta)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \sqrt{a}\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}(x-\beta)\,, \qquad a>0$$

• Se $b^2-4ac<0$, $a>0$
A substituição

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x+t$$

em que

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} = \varphi(t) \Rightarrow t = \varphi^{-1}(x)$$

permite reduzir a determinação do integral I à determinação de um integral cuja função integranda é uma função racional.

$$I = \int_{\varphi^{-1}(x_1)}^{\varphi^{-1}(x_2)} R\left(\varphi(t),t\right)\varphi'(t)\,dt$$

Exemplo 4.7.2. *Determine-se o integral*

$$\int_1^2 \frac{1}{(x^2+k^2)\sqrt{x^2+k^2}}\,dx$$

Considere-se

$$\sqrt{x^2+k^2} = x+t \Rightarrow x = \frac{k-t^2}{2t} = \varphi(t) \quad \text{e} \quad \varphi'(t) = -\frac{k^2+t^2}{2t^2}$$

Tem-se

$$\int_1^2 \frac{1}{(x^2+k^2)\sqrt{x^2+k^2}}\,dx = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{(x+t)^2(x+t)}\frac{k^2+t^2}{2t^2}\,dt =$$
$$= -4\int_{t_1}^{t_2} \frac{t}{\left(t^2+k^2\right)^2}\,dt = \left[\frac{2}{t^2+k^2}\right]_{t_1}^{t_2}$$

em que $t_1 = -1+\sqrt{1+k^2}$ e $t_2 = -2+\sqrt{4+k^2}$.

Considere-se a finalizar a secção a integração de uma classe de funções trigonométricas. Seja o integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} R\left(\operatorname{sen} x, \cos x\right)\,dx$$

A substituição

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t = \varphi(t)\,, \qquad \varphi'(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

e

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

permite reduzir a determinação do integral I à determinação de um integral cuja função integranda é uma função racional.

$$I = 2\int_{\varphi^{-1}(x_1)}^{\varphi^{-1}(x_2)} R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Exemplo 4.7.3. *Determine-se o integral*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}\,dx$$

Considere-se

$$x = 2\operatorname{arctg} t$$

Tem-se

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)}\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,dt = [\ln|t+1|]_0^1 = \ln 2$$

já que $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$

4.8 Exercícios

4.8.1 Exercícios resolvidos

Exerc 4.8.1. *Determine o valor dos seguintes integrais:*

$$i) \quad \int_0^1 (x^2-\sqrt{x})dx \qquad\qquad ii) \quad \int_0^1 x\cos x\,dx$$

Resolução.

i) Directamente da fórmula de Barrow

$$\int_0^1 (x^2-\sqrt{x})dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}$$

ii) Recorrendo ao método de integração por partes

$$\int_0^1 x\cos x\,dx = [x\,\mathrm{sen}\,x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{sen}\,x\,dx = \mathrm{sen}\,1 + \cos 1 - 1$$

■

Exerc 4.8.2. *Determine o valor dos integrais*

$$i) \quad \int_0^{1/2} \frac{4x\,\mathrm{arcsen}\,x^2}{\sqrt{4-(\sqrt{2}x)^4}}\,dx \qquad\qquad ii) \quad \int_0^1 \mathrm{arctg}\,x\,dx.$$

Resolução.

i) Directamente da fórmula de Barrow

$$\int_0^{1/2} \frac{8x\,\mathrm{arcsen}\,x^2}{\sqrt{4-(\sqrt{2}x)^4}}\,dx = \left[\mathrm{arcsen}^2\,x^2\right]_0^{1/2} = \frac{\pi^2}{36}$$

ii) Recorrendo ao método de integração por partes

$$\int_0^1 \mathrm{arctg}\,x\,dx = [x\,\mathrm{arctg}\,x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= (1.\,\mathrm{arctg}\,1 - 0.\,\mathrm{arctg}\,0) - \left[\ln\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \pi/4 - \ln\sqrt{2}$$

■

Exerc 4.8.3. *Determine o valor dos integrais*

$$i) \quad \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{4-(\ln x)^2}}, \qquad\qquad ii) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\,x\ \mathrm{sh}\,x\,dx.$$

Resolução.

i) Directamente da fórmula de Barrow

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{4-(\ln x)^2}} = \int_1^e \frac{\frac{1}{2x}}{\sqrt{1-(\frac{\ln x}{2})^2}}dx = \left[\mathrm{arcsen}\left(\frac{\ln x}{2}\right)\right]_1^e = \frac{\pi}{6}.$$

ii) Tem-se, recorrendo ao método de integração por partes,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \ \operatorname{sh} x \, dx = [-\cos x \ \operatorname{sh} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x \ \operatorname{ch} x \, dx$$

Aplicando mais uma vez o método de integração por partes tem-se

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ \operatorname{ch} x \, dx = [\operatorname{sen} x \ \operatorname{ch} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \ \operatorname{sh} x \, dx$$

Assim obtém-se a equação

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \ \operatorname{sh} x \, dx = [-\cos x \ \operatorname{sh} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\operatorname{sen} x \operatorname{ch} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \ \operatorname{sh} x \, dx$$

Concluindo-se que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \ \operatorname{sh} x \, dx = \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2}}{2}$$

■

Exerc 4.8.4. *Determine o valor dos integrais*

i) $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx$ *ii)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x+2)(x+1)^2} \, dx$

Resolução.

i)

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx = [\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[x - \operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

ii) A função integranda é uma função racional que se decompõe em fracções simples

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x+2)(x+1)^2} \, dx = A \int_0^1 \frac{1}{x+2} \, dx + B \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} \, dx + C \int_0^1 \frac{1}{x+1} \, dx =$$

$$= A[\ln(x+2)]_0^1 - B[\frac{1}{x+1}]_0^1 + C[\ln(x+1)]_0^1.$$

A determinação das constantes A, B, C é feita pelo método dos coeficientes indeterminados já que

$$x^2 = (A+C)x^2 + (2A+B+3C)x + A + 2B + 2C$$

Tem-se $A = 4,\ B = 1,\ C = -3$ concluindo-se que:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x+2)(x+1)^2}\,dx = 4\ln(3/2) + 1/2 - 3\ln(2).$$

■

Exerc 4.8.5. *Determine, usando o método de substituição, o valor do integral*

$$\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}+2}dx$$

Sugestão: Utilize a substituição $\sqrt{x-1} = t$

Resolução. Aplicando o método de integração por substituição

$$\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}+2}dx = \int_1^2 \frac{t^2+1}{t+2}.t\,dt = .$$

$$= \int_1^2 \frac{t^3+t}{t+2}\,dt = \int_1^2 \left(t^2 - 2t + 5 + \frac{-10}{t+2}\right)dt =$$

$$= \left[t^3/3 - t^2 + 5t - 10\ln(t+2)\right]_1^2 = 13/3 - 10\ln(4/3)$$

■

Exerc 4.8.6. *Determine, usando o método de substituição, o valor do integral*

$$\int_1^2 \frac{dx}{(e^x-1)^2}.$$

Sugestão: Utilize a substituição $e^x = t$

Resolução. Aplicando o método de integração por substituição

$$\int_1^2 \frac{dx}{(e^x-1)^2} = \int_e^{e^2} \frac{dt}{(t-1)^2 t} = .$$

$$= \int_e^{e^2} \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{(t-1)^2}\right)dt = \int_e^{e^2} \frac{1}{t}dt + \int_e^{e^2} \frac{-1}{t-1}dt + \int_e^{e^2} \frac{1}{(t-1)^2}dt = .$$

$$= [\ln t]_e^{e^2} - [\ln(t-1)]_e^{e^2} - \left[\frac{1}{t-1}\right]_e^{e^2} = \ln\left(\frac{e^2}{e^2-1}\right) + \frac{e}{e^2-1}.$$

■

Exerc 4.8.7. *Calcule o seguinte integral por substituição, recorrendo à função* $\varphi(t) = 2\operatorname{arctg}(t)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} dx.$$

(Sugestão: $\operatorname{sen} x = \dfrac{2\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{1+\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}$*)*

Resolução. Sendo $x = \varphi(t) = 2\operatorname{arctg}(t)$, $\varphi'(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$
e

$$\operatorname{sen}(2\operatorname{arctg}(t)) = \frac{2\operatorname{tg}(\frac{(2\operatorname{arctg}(t))}{2})}{1+\operatorname{tg}^2(\frac{(2\operatorname{arctg}(t))}{2})} = \frac{2t}{1+t^2}$$

tem-se

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2} dt = \left[-2(t+1)^{-1}\right]_0^1 = 1.$$

■

Exerc 4.8.8. *Considere a função* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *injectiva e diferenciável, com derivada contínua, tal que,* $f'(x) \neq 0$ *para* $x \in [a,b]$.
Mostre que se $f([a,b]) = [c,d]$, *a função inversa* $f^{-1} : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é integrável e*

$$\int_c^d f^{-1}(y)\, dy = f^{-1}(d).d - f^{-1}(c).c - \int_{f^{-1}(c)}^{f^{-1}(d)} f(x)\, dx.$$

Resolução. f^{-1} é contínua em $[c,d]$ e consequentemente integrável. Integrando por partes

$$\int_c^d f^{-1}(y).1\, dy = [f^{-1}(y).y]_c^d - \int_c^d (f^{-1})'(y).y\, dy$$

Ora sendo $y = f(x)$

$$(f^{-1})'(y) = (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Assim integrando por substituição em que $x = f^{-1}(y)$

$$\int_c^d (f^{-1})'(y).y\, dy = \int_{f^{-1}(c)}^{f^{-1}(d)} \frac{1}{f'(x)}.f(x).f'(x)\, dx.$$

■

Exerc 4.8.9. *Considere a função* $F :]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$F\left(x\right) = \int_0^{\cos x} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(4-t^2)}}dt$$

i) Defina a derivada de $F(x)$

ii) A função F *é monótona? Justifique.*

Resolução.

i) Sendo

$$F_1\left(x\right) = \int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(4-t^2)}}dt \quad \text{e} \quad f(x) = \cos x$$

a função $F = F_1 \circ f$. Assim pela derivada da função composta

$$F'(x) = F_1'(f(x)).f'(x)$$

Ora $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ e pelo teorema fundamental do cálculo integral

$$F_1'\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(4-x^2)}} \qquad x \in]-1, 1[$$

Em conclusão

$$F'\left(x\right) = \frac{-\operatorname{sen} x}{\sqrt{(1-\cos^2 x)(4-\cos^2 x)}} \qquad x \in]0, \pi[$$

ii) A função F é monótona, estritamente crescente, em $x \in]0, \pi[$ uma vez que

$$F'\left(x\right) = \frac{-\operatorname{sen} x}{\sqrt{(1-\cos^2 x)(4-\cos^2 x)}} > 0, \qquad x \in]0, \pi[$$

■

Exerc 4.8.10.

Considere a função $G : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G\left(x\right) = \int_0^{x+x^2} \frac{t^2}{t^4+1}dt$$

i) Defina justificando a função derivada de G*.*

ii) O contradomínio de G está contido em $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$? Justifique.

Resolução.

i) Sendo

$$G_1(x) = \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1} dt \quad \text{e} \quad f(x) = x + x^2$$

a função $G = G_1 \circ f$. Assim pela derivada da função composta

$$G'(x) = G_1'(f(x)).f'(x)$$

Ora $f(x) = x + x^2$ e pelo teorema fundamental do cálculo

$$G_1'(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$$

Em conclusão tem-se

$$G'(x) = \frac{(x+x^2)^2}{(x+x^2)^4+1}(2x+1)$$

ii) Sim, tem-se $CD_G = \{G(x) : x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\} \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Da alínea anterior deduz-se que G, em que $G(0) = 0$, é uma função contínua crescente, pois $G'(x) \geq 0$ para $x \geq 0$, concluindo-se do teorema de Bolzano e da monotonia da função G que $CD_G \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

■

Exerc 4.8.11. *Considere a função $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$G(x) = \int_0^{\cos 2x} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

i) Calcule $G(0)$.

ii) A função G é diferenciável no seu domínio? Justifique e em caso afirmativo determine a função derivada de G.

Resolução.

i) Tem-se pela fórmula de Barrow

$$G(0) = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt = [(1+t^2)^{\frac{1}{2}}]_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

ii) A função $g(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e do teorema fundamental do cálculo, $G_1(x) = \int_0^x \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt$ é diferenciável em $\mathbb{R}$. Assim a função $G = G_1 \circ f$, em que $f(x) = \cos 2x$, é diferenciável pois resulta da composição de funções diferenciáveis tendo-se

$$G'(x) = -2\operatorname{sen} 2x \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}$$

■

Exerc 4.8.12. *Considere a função* $G :]1/2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$G(x) = \int_1^{2+\cos x} \frac{1}{t^3+2t^2+t}dt.$$

i) Calcule $G(\frac{3\pi}{2})$.

ii) Justifique que G *é diferenciável em* $]1/2, +\infty[$ *e calcule* $G'(x)$, *para* $x > 1/2$.

Resolução.

i)
$$G(\frac{3\pi}{2}) = \int_1^{2+\cos 3\pi/2} \frac{1}{t^3+2t^2+t}dt = \int_1^2 \frac{1}{t^3+2t^2+t}dt.$$

A função integrando é uma função racional que se decompõe em fracções simples

$$\frac{1}{t^3+2t^2+t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2}$$

em que $A = 1$, $B = -A$ e $C = -1$ já que

$$1 = (A+B)t^2 + (2A+B+C)t + A\ .$$

Assim

$$\int_1^2 (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2})dt = [\ln t - \ln(t+1) + (t+1)^{-1}]_1^2 = 2\ln 2 - \ln 3 - 1/6.$$

ii) Do teorema fundamental do cálculo, uma vez que $f(t) = \dfrac{1}{t^3+2t^2+t}$ é uma função contínua no domínio e, do teorema da derivada da função composta tem-se que G é uma função diferenciável em $]1/2, +\infty[$ tendo-se para $x > 1/2$

$$G'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x}{(2+\cos x)^3 + 2(2+\cos x)^2 + (2+\cos x)}$$

■

Exerc 4.8.13. *Sabendo que f tem derivadas contínuas até à 2^a ordem em $\mathbb{R}$, e que para $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$, mostre que*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt.$$

Resolução. Recorrendo ao método de integração por partes

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = [tf'(t)]_a^x - \int_a^x tf''(t)dt =$$

$$= xf'(x) - af'(a) - \int_a^x tf''(t)dt = xf'(x) - af'(a) + xf'(a) - xf'(a) - \int_a^x tf''(t)dt =$$

$$= (x-a)f'(a) + x(f'(x) - f'(a)) - \int_a^x tf''(t)dt = (x-a)f'(a) + x\int_a^x f''(t)dt - \int_a^x tf''(t)dt$$

Assim

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt.$$

■

Exerc 4.8.14. *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Mostre que se F é uma primitiva de f em $[a,b]$,*

$$\int_a^b f^2(x)dx = F(b)F'(b) - F(a)F'(a) - \int_a^b F(x)F''(x)dx.$$

Resolução. Sendo f é diferenciável e F uma primitiva de f tem-se que f é contínua e que $F'(x) = f(x)$. Assim integrando por partes

$$\int_a^b f(x)f(x)dx = [f(x)F(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)F(x)dx$$

Ora

$$[f(x)F(x)]_a^b = F(b)F'(b) - F(a)F'(a).$$

e

$$\int_a^b f'(x)F(x)dx = \int_a^b F(x)F''(x)dx.$$

o que conduz de imediato à proposição que se queria demonstrar. ■

Exerc 4.8.15. *Calcule a área da região limitadas pela curva* $y^2 = x(1-x)^2$ *e as rectas* $x = 0$ *e* $x = 1/2$.

Resolução. Sendo A a área da região tem-se

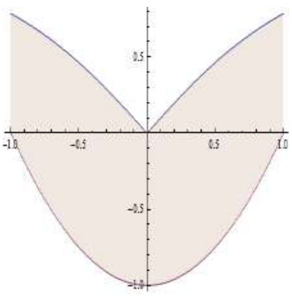
$$A = 2\int_0^{1/2} \sqrt{x(1-x)^2}dx = 2\int_0^{1/2} \sqrt{x}\,(1-x)\,dx = 2\left(\int_0^{1/2} x^{1/2}dx - \int_0^{1/2} x^{3/2}dx\right)$$

Aplicando a fórmula de Barrow obtém-se

$$A = 2\left(\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^{1/2} - \left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^{1/2}\right) = \frac{27}{30}\sqrt{2}.$$

■

Exemplo 4.8.16. *Determine a área da região plana delimitada pelas rectas verticais de equações* $x = -1$, $x = 1$ *e pelos gráficos das funções* $\operatorname{arctg}|x|$, $x^2 - 1$.



As funções $\operatorname{arctg}|x|$, $x^2 - 1$ são funções pares tendo-se

$$A = \int_{-1}^{1} \left(\operatorname{arctg}|x| - (x^2-1)\right)\,dx = 2\int_0^1 \left(\operatorname{arctg} x - (x^2-1)\right)\,dx$$

Ora usando a primitivação por partes

$$\int 1.\operatorname{arctg} x\,dx = x.\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Assim

$$A = 2\left[x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3} - \ln 2$$

4.8.2 Enunciados de exercícios

Exerc 4.8.17. *Determine o valor dos seguintes integrais*

$$i) \quad \int_1^2 (\frac{1}{x} - 1)dx \qquad\qquad ii) \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$$

Exerc 4.8.18. *Determine o valor dos seguintes integrais*

$$i) \quad \int_0^1 (x - e^x)dx \qquad\qquad ii) \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$$

Exerc 4.8.19. *Determine o valor dos seguintes integrais*

$$i) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \operatorname{sen} x)dx \qquad\qquad ii) \quad \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}\,dx$$

Exerc 4.8.20. *Determine o valor dos seguintes integrais*

$$i) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)dx \qquad\qquad ii) \quad \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$$

Exerc 4.8.21. *Determine o valor dos seguintes integrais*

$$i) \quad \int_1^2 (\frac{1}{\sqrt{x}} - 1)dx \qquad\qquad ii) \quad \int_0^1 xe^x\,dx$$

Exerc 4.8.22. *Calcule por substituição, recorrendo à função* $\varphi(t) = 2\operatorname{arctg}(t)$, *o integral*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos x}dx.$$

(Sugestão: $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}{1+\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}$*)*

Exerc 4.8.23. *Calcule por substituição, recorrendo à função* $\varphi(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, *o integral*

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$$

Exerc 4.8.24. *Calcule por substituição, recorrendo à função* $\varphi(t) = 2\operatorname{arctg}(t)$, *o integral*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\operatorname{sen} x + 2}dx.$$

(Sugestões: $\operatorname{sen} x = \dfrac{2\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{1+\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}$ *;* $t^2+t+1 = (t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$*)*

Exerc 4.8.25. *Considere a função* $F :]1/2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$*, definida por*

$$F(x) = \int_1^{2x} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\, dt.$$

i) Calcule $F(1)$.

ii) Justifique que F *é diferenciável em* $]1/2, +\infty[$ *e calcule* $F'(x)$*, para* $x > 1/2$.

Exerc 4.8.26. *Considere a função* $G :]1/2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$*, definida por*

$$G(x) = \int_1^{2x^2} \frac{1}{1+4t^2} dt.$$

i) Calcule $G(1)$.

ii) Justifique que G *é diferenciável em* $]1/2, +\infty[$ *e calcule* $G'(x)$*, para* $x > 1/2$.

Exerc 4.8.27. *Considere a função* $F :]1/2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$*, definida por*

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t+1}}\, dt.$$

i) Calcule $F(1)$.

ii) Justifique que F *é diferenciável em* $]1/2, +\infty[$ *e calcule* $F'(x)$*, para* $x > 1/2$.

Exerc 4.8.28. *Considere a função* $G :]1/3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$*, definida por*

$$G(x) = \int_1^{3x} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

i) Calcule $G(1)$.

ii) Justifique que G *é diferenciável em* $]1/3, +\infty[$ *e calcule* $G'(x)$*, para* $x > 1/3$.

Exerc 4.8.29. *Considere a função* $F :]1/2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$*, definida por*

$$F(x) = \int_1^{2+\operatorname{sen} x} \frac{2}{t^3+t}\, dt.$$

i) Calcule $F(\pi)$.

ii) Justifique que F *é diferenciável em* $]1/2, +\infty[$ *e calcule* $F'(x)$*, para* $x > 1/2$.

Capítulo 5

Séries numéricas e séries de potências

Inicia-se o capítulo com a definição de série numérica e com a noção de convergência de séries numéricas, indicando-se exemplos, em particular o exemplo da série geométrica. Considerando séries numéricas com termos não negativos e não positivos estabelece-se uma condição necessária de convergência e o critério de Cauchy bem como as suas consequências imediatas. Estabelecem-se para séries de termos não negativos critérios de convergência. Estabelece-se o critério de comparação, o critério da razão e o critério da raiz. Define-se série absolutamente convergente e analisa-se a consequência deste conceito na análise da natureza de séries de termos reais. Aborda-se sumariamente a determinação aproximada da soma de uma série convergente.
Introduz-se o conceito de série de potências. Estabelecem-se para estas séries condições de convergência e indica-se, quando possível, expressões para a sua soma.

5.1 Série numérica. Definição. Exemplos.

Procurando estender a noção de adição a um número infinito de parcelas e atribuir significado ao símbolo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

em que a_n é uma sucessão de termos reais é natural pensar na sucessão de termos reais

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \,.
\end{aligned}$$

Nem sempre é possível contudo atribuir significado ao símbolo considerado mas, se a sucessão s_n convergir naturalmente

$$\lim_n s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Definição 5.1.1. *Sejam as sucessões de termos reais a_n e $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Designa-se por série numérica o objecto matemático definido pelo par ordenado (a_n, s_n)*

A série numérica por simplicidade representa-se por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

em que a sucessão a_n é designada por sucessão dos termos da série e a sucessão s_n é designada por sucessão das somas parciais. Note-se que as duas sucessões a_n e s_n são determinadas uma pela outra

$$\begin{array}{lcl}
a_n & - - - \rightarrow & s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\
s_n & - - - \rightarrow & a_n = s_n - s_{n-1}
\end{array}$$

Definição 5.1.2. *A série numérica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

é uma série convergente(divergente) se e só se a sucessão s_n é uma sucessão convergente(divergente).
Se a série é convergente a soma da série é o limite da sucessão s_n i. e.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_n s_n$$

Teorema 5.1.3. *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente então a sucessão* a_n *é um infinitésimo*

Demonstração. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série convergente se e só se a sucessão $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ é convergente. Tem-se

$$a_{n+1} = s_{n+1} - s_n.$$

Ora sendo s_n uma sucessão convergente, uma vez que s_{n+1} é uma subsucessão de s_n,

$$\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} s_{n+1} - \lim_{n \to +\infty} s_n = 0$$

■

Exemplo 5.1.4. *Seja a série geométrica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a.r^{n-1}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Analise-se para que valores de $r \in \mathbb{R}$ *a série é convergente.*

• $r = 1$

$$s_n = a + a + \ldots + a = n.a$$

A série é divergente pois s_n é uma sucessão divergente.

• $r \neq 1$

$$s_n - r.s_n = a(1 - r^n) \quad \Rightarrow \quad s_n = a.\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Como

$$\lim_{n \to +\infty} r^n = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad r > 1 \\ 0 & \text{se} \quad |r| < 1 \\ \text{não existe} & \text{se} \quad r \leq -1. \end{cases}$$

tem-se que a sucessão s_n converge se e só se $|r| < 1$. Consequentemente a série geométrica indicada é convergente se e só se $|r| < 1$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a.r^{n-1} = \frac{a}{1 - r}.$$

Exemplo 5.1.5. *Analise-se a convergência da série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Tem-se

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{e} \quad s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Ora

$$s_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \longrightarrow +\infty$$

consequentemente a sucessão s_n é divergente e a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente. Este exemplo mostra que a condição $a_n \longrightarrow 0$ é uma condição necessária de convergência, mas não é condição suficiente, pois $a_n \longrightarrow 0$ e a série é divergente.

Exemplo 5.1.6. *Seja a série de Mengoli*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Analise-se se a série é convergente.

Tem-se

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{e} \quad s_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Ora

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

vindo

$$s_1 = 1 - 1/2$$

$$s_2 = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) = 1 - 1/3$$

$$\vdots$$

$$s_n = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + \ldots + (-1/n) + (1/n - 1/(n+1)).$$

Assim a sucessão $s_n = 1 - 1/(n+1)$ é uma sucessão convergente que tem como limite 1. A série de Mengoli indicada é pois uma série convergente e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Mais geralmente tem-se a proposição seguinte

Proposição 5.1.7. *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

em que

$$a_n = u_n - u_{n+1} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}$$

e a sucessão u_n são convergentes ou divergentes simultaneamente e em caso de convergência

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = u_1 - \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}$$

Demonstração. Considere-se a sucessão

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \ldots + (u_n - u_{n+1}) = u_1 - u_{n+1}.$$

As sucessões s_n e u_n, atendendo à expressão anterior, têm a mesma natureza. Sendo convergentes

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = u_1 - \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}.$$

■

Conclui-se esta secção com resultados de operações algébricas envolvendo séries.

Teorema 5.1.8.

i) Sejam

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a''_n,$$

duas séries convergentes de somas respectivamente s' e s''. Então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, em que $a_n = a'_n + a''_n$, é convergente de soma $s = s' + s''$.

ii) Se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

é uma série convergente de soma s*, e* $b \in \mathbb{R}$*. Então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *em que* $b_n = ba_n$ *é convergente de soma* bs*.*

Demonstração.

i) Sejam s'_n e s''_n as sucessões de somas parciais associadas às séries de termos gerais respectivamente a'_n e a''_n.
Tem-se

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n = (a'_1 + a''_1) + \ldots + (a'_n + a''_n) =$$

$$= (a'_1 + \ldots + a'_n) + (a''_1 + \ldots + a''_n) = s'_n + s''_n.$$

Concluindo-se que a sucessão s_n é convergente e

$$s_n \to s' + s'' = s$$

ii) Sendo t_n a sucessão das somas parciais associada à série de termo geral ba_n tem-se

$$b.a_1 + \ldots + b.a_n = b.(a_1 + \ldots + a_n) \to b.s$$

■

Observação 5.1.9.

- *Quando são divergentes as séries* $\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} a''_n$*, a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a'_n + a''_n),$$

  pode divergir ou convergir.

- *Quando uma das séries* $\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n$ *ou* $\sum_{n=1}^{+\infty} a''_n$ *converge e a outra diverge a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a'_n + a''_n),$$

  diverge.

5.2 Critério de Cauchy. Consequências

Em geral a convergência de uma série não é analisada directamente a partir da sucessão das somas parciais, mas recorrendo a critérios de convergência. Analisa-se nesta secção uma condição necessária e suficiente de convergência designada por critério de Cauchy.

Teorema 5.2.1 (Critério de Cauchy)**.** *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

é convergente se e só se

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists}\quad r \geq q > p \ \Rightarrow\ |a_{q+1} + \ldots + a_r| < \epsilon$$

Demonstração.

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente se e só se a sucessão $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ é uma sucessão convergente. Ora a sucessão s_n é uma sucessão convergente se e só se a sucessão s_n é uma sucessão de Cauchy. Por outro lado s_n é uma sucessão de Cauchy se e só se

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists}\quad r \geq q > p \ \Rightarrow\ |s_r - s_q| < \epsilon$$

Atendendo a que

$$s_r - s_q = a_{q+1} + \ldots + a_r.$$

tem-se assim o critério de Cauchy. ■

Observação 5.2.2. *A condição necessária de convergência* $a_n \to 0$ *pode obter-se a partir deste critério:*

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists}\quad r \geq q > p \ \Rightarrow\ |a_{q+1} + \ldots + a_r| < \epsilon \underset{r=q+1}{\Rightarrow} |a_{q+1}| < \epsilon$$

Exemplo 5.2.3. *Analise-se se a série harmónica,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

é uma série divergente.

Tem-se para $r = 2q$ que

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+2} + \ldots + \frac{1}{2q} \geq \frac{1}{2q} + \ldots + \frac{1}{2q} = \frac{1}{2}$$

Assim pelo critério de Cauchy a série é divergente.

Corolário 5.2.4. *As séries numéricas*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

em que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para $n > p$, $a_n = b_n$, são da mesma natureza (a natureza da série não depende dos p primeiros termos)

Exemplo 5.2.5. *Têm a mesma natureza as séries numéricas*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$2 + 3 + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = 2 + 3 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

São ambas séries convergentes ainda que com somas diferentes.

Corolário 5.2.6. *A natureza de uma série não é alterada se for suprimido um número finito arbitrário de termos i.e. para $p \in \mathbb{N}$ as séries*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n,$$

em que $b_n = a_{n+p}$, são da mesma natureza.

Exemplo 5.2.7. *São séries simultaneamente divergentes as séries:*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+2} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}$$

5.3 Critérios de convergência para séries de termos não negativos

Teorema 5.3.1. *Sendo $a_n \geq 0$ a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

é convergente se e só se a sucessão das somas parciais é majorada.

Demonstração. A sucessão

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$$

é uma sucessão crescente já que, como $a_{n+1} \geq 0$,

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \, .$$

Ora uma sucessão s_n crescente é convergente se e só se é majorada. ■

Teorema 5.3.2 (Critério geral de comparação). *Seja*

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

i) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma série convergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série convergente.

ii) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série divergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma série divergente.

Demonstração.

i) Sejam as sucessões das somas parciais

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n, \quad \text{e} \quad t_n = b_1 + \ldots + b_n.$$

Como $0 \leq a_n \leq b_n$ tem-se $s_n \leq t_n$. Ora sendo $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ uma série convergente do teorema 5.3.1, t_n é uma sucessão majorada consequentemente a sucessão s_n é uma sucessão majorada concluindo-se que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série convergente.

ii) Tendo presente que sendo A, B proposições, $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A}$, tem-se de imediato ii) de i) .

■

Exemplo 5.3.3. *Analise-se a convergência da série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

A série a analisar tem a mesma natureza que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

Ora

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} \quad n \in \mathbb{N}$$

em que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é uma série de Mengoli convergente. Do critério geral de comparação tem-se então que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

é uma série convergente.

Exemplo 5.3.4. *Analise-se a natureza da série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$

Uma vez que se tem $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^{1/3}}$ e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente a série considerada é uma série divergente.

Mais geralmente tem-se que as *séries de Dirichlet*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

são séries convergentes se $p > 1$ e séries divergentes se $p \leq 1$

Teorema 5.3.5 (Critério geral de comparação na forma de limite)**.** *Sejam* $a_n \geq 0$ *e* $b_n > 0$. *Então*

i) Se existir o limite em $\mathbb{R}$ *de* a_n/b_n *e for diferente de zero, as séries*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

têm a mesma natureza.

ii) Se

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$$

tem-se que se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *é uma série convergente então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é uma série convergente.*

iii) Se

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$$

tem-se que se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *é uma série divergente então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é uma série divergente.*

Demonstração.

i) Seja

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=l\neq 0$$

Então

$$\underset{\epsilon\in]0,l[}{\exists} n>p \qquad 0<l-\epsilon<\frac{a_n}{b_n}<l+\epsilon$$

concluindo-se que

$$0<k_1<\frac{a_n}{b_n}<k_2$$

em que $k_1=l-\epsilon$, $k_2=l+\epsilon$. Assim do critério geral de comparação tem-se que se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente e que, se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente.

ii) Sendo o limite zero

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} n>p \qquad 0\leq\frac{a_n}{b_n}\leq\epsilon \;\Rightarrow\; a_n\leq\epsilon b_n$$

obtendo-se a conclusão do critério geral de comparação.

iii) Sendo o limite $+\infty$

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} n > p \qquad \frac{a_n}{b_n} \geq \epsilon \Rightarrow a_n \geq \epsilon b_n$$

obtendo-se a conclusão do critério geral de comparação.

■

Exemplo 5.3.6. *Analise-se a natureza da série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Sendo

$$a_n = n^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{n^{\frac{1}{4}}}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$$

tem-se

$$\lim \frac{a_n}{n^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Assim a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série convergente pois tem a mesma natureza que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$, que é uma série de Dirichlet convergente.

Teorema 5.3.7 (Critério da razão)**.** *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *uma série de termos não negativos*

i) Se existe $r < 1$ *tal que a partir de certa ordem*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$$

então $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente.*

ii) Se a partir de certa ordem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

então $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

Demonstração.

i) Seja $b_n = r^n$. A série geométrica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge quando $r < 1$. Ora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Assim $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$ e a sucessão $\frac{a_n}{b_n}$ é decrescente tendo-se

$$\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_1}{b_1} = k$$

Recorrendo ao critério de comparação, uma vez que $a_n \leq kb_n$, se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente é também convergente $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

ii) Se a partir de certa ordem $a_{n+1} \geq a_n$ então a_n não tende para zero e consequentemente a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ não é convergente.

■

Corolário 5.3.8 (Critério de D'Alembert)**.** *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *uma série de termos positivos e suponha-se que existe*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

- *Se* $l < 1$ *a série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*
- *Se* $l > 1$ *a série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*
- *Se* $l = 1^+$ *a série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*

Demonstração.

- Se $l < 1$ escolhido $\epsilon \in]0, 1-l[$ tem-se a partir de certa ordem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq l + \epsilon < 1$$

vindo do critério da razão que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

- Nos restantes casos basta verificar que a condição necessária de convergência da série não se verifica.

■

Exemplo 5.3.9. *Considere-se a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}, \qquad a > 1$$

e analise-se se é convergente.

Tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n+1} = 0$$

concluindo-se pelo critério de D'Alembert que a série é convergente.
Como consequência da convergência da série

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

i.e. quando $n \to +\infty$, a^n é desprezável relativamente a $n!$, $a^n = o(n!)$.

Exemplo 5.3.10. *Considere-se a série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ *e analise-se se é convergente.*

Tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$$

concluindo-se pelo critério de D'Alembert que a série é convergente.
Como consequência da convergência da série

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

i.e. quando $n \to +\infty$, $n!$ é desprezável relativamente a n^n, $n! = o(n^n)$.

Teorema 5.3.11 (Critério da raiz)**.** *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *uma série de termos não negativos.*

i) Se existe $r < 1$ tal que a partir de certa ordem $\sqrt[n]{a_n} \leq r$ então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

ii) Se a partir de certa ordem $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Demonstração.

i) Se para $n > p$ se tem $a_n \leq r^n$ em que $r < 1$ então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \quad \text{série convergente} \qquad \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{série convergente.}$$

ii) Se existirem infinitos números naturais tais que $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, a sucessão a_n não é um infinitésimo e consequentemente a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ não converge.

■

Corolário 5.3.12. *Seja $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos e*

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = l$$

i) Se $l < 1$ a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

ii) $l > 1$ a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

iii) $l = 1$ nada se pode concluir.

Exemplo 5.3.13. *Analise-se a convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na^n$*

Tem-se

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{na^n} = a$$

concluindo-se pelo critério de Cauchy que a série é convergente se $a < 1$ e divergente se $a > 1$. Para $a = 1$ a série é divergente uma vez que não satisfaz a condição necessária para a convergência de séries.

Observação 5.3.14. *Tem-se*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=1 \quad e \quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1$$

Sendo a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ *convergente e a série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ *divergente conclui-se que sendo* $l=1$ *do corolário 5.3.12 nada se pode concluir quanto à natureza da série.*

Teorema 5.3.15 (Critério integral)**.** *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)\,,$$

em que f *uma função contínua, decrescente e positiva em* $\{x\in\mathbb{R}:\ x\geq 1\}$*, é uma série convergente se e só se existe, em* $\mathbb{R}$*,*

$$\lim_{m\to+\infty}\int_1^m f(x)\,dx$$

Demonstração. Como a função f é contínua, decrescente e positiva no intervalo $[k,k+1]$, $k\in\mathbb{N}$, tem-se

$$f(k+1)\leq\int_k^{k+1}f(x)\,dx\leq f(k)$$

Ora considerando $n-1$ desigualdades para $k=1,\ldots,n-1$, e somando termo a termo tem-se

$$s_n-f(1)=\sum_{k=1}^{n}f(k)-f(1)\leq\int_1^n f(x)\,dx\leq\sum_{k=1}^{n-1}f(k)=s_{n-1}$$

o que permite obter de imediato o critério integral. ■

Este critério integral permite estabelecer a convergência das séries de Dirichlet. Considerando $\lim\limits_{m\to+\infty}\int_1^m f(x)\,dx$ em que $f(x)=\frac{1}{x^p}$ tem-se

$$\int_1^n\frac{1}{x}\,dx=\ln n-\ln 1$$

e se $p\neq 1$

$$\int_1^n\frac{1}{x^p}\,dx=\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{n^{p-1}}-1\right)$$

Assim da existência em $\mathbb{R}$ de $\lim\limits_{m\to+\infty}\int_1^m f(x)\,dx$ conclui-se que as séries de Dirichlet são divergentes se $p\leq 1$ e convergentes se $p>1$.

5.4 Séries absolutamente convergentes

Os critérios de convergência para séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

em que $a_n \geq 0$ permitem analisar evidentemente a convergência das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ em que $b_n = -a_n$, para $n \geq p$ com $p \in \mathbb{N}$. O conceito de série absolutamente convergente, que se introduz nesta secção vai permitir alargar o conjunto das séries cujos critérios de convergência de séries de termos não negativos se podem aplicar.

Definição 5.4.1. *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é uma série absolutamente convergente se*

- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é uma série convergente;*

e

- $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *é uma série convergente.*

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se uma série *simplesmente convergente* se for uma série convergente e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ for uma série divergente.

Observação 5.4.2. *Qualquer série convergente que tenha todos os termos com o mesmo sinal é absolutamente convergente. Uma série simplesmente convergente tem infinitos termos positivos e infinitos termos negativos.*
Note-se que muitas das propriedades da adição não são verificadas para as séries simplesmente convergentes mas apenas para as séries absolutamente convergentes.

Teorema 5.4.3. *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *é uma série convergente então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é também uma série convergente tendo-se*

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

Demonstração. Convergindo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, do critério de Cauchy,

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists} \quad r \geq q > p \ \Rightarrow \ |a_{q+1}| + \ldots + |a_r| < \epsilon$$

Ora como

$$|a_{q+1} + \ldots + a_r| \leq |a_{q+1}| + \ldots + |a_r| \tag{5.4.1}$$

pode concluir-se, se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ for convergente, que

$$|a_{q+1} + \ldots + a_r| < \epsilon$$

o que pelo critério de Cauchy permite concluir a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Finalmente passando ao limite em (5.4.1) tem-se a relação entre as somas das séries indicada. ■

Observação 5.4.4. *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *é uma série divergente, a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *pode ser convergente ou divergente.*

Exemplo 5.4.5. *Analise-se quanto à convergência a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n\pi)$, *em que* $0 < r < 1$.

Esta série é absolutamente convergente, uma vez que a série do módulos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |r^n \cos(n\pi)| = \sum_{n=1}^{+\infty} |r^n(-1)^n| = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n$$

é uma série geométrica convergente já que $0 < r < 1$.

5.5 A soma de séries

Conhecida a convergência de uma série numérica na prática apenas em casos particulares é fácil o *cálculo da soma da série* por passagem ao limite da sucessão das somas parciais. Em geral, opta-se por obter valores aproximados da soma.
Considerando a série convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

do corolário 5.2.6 a série

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n$$

é uma série convergente designada por resto de ordem p.
Fixando $p \in \mathbb{N}$ o termo de ordem $n+p$ da sucessão das somas parciais da série pode escrever-se

$$s_{n+p} = s_p + (a_{p+1} + \ldots + a_{p+n})$$

Passando ao limite em n tem-se

$$s = s_p + r_p$$

em que r_p, o resto de ordem p, é a soma da série $\sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} a_n$. Assim a soma da série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pode ser aproximada por

$$s_p = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

com erro $r_p = s - s_p$.

Vai-se indicar de seguida majorantes para o erro que se comete ao aproximar a soma de séries absolutamente convergentes, cuja convergência foi estabelecida pelo critério da raiz e pelo critério da razão.

- Seja $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ em que $|a_n|^{1/n} \leq r < 1$. Tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{p} a_n + r_p$$

  e

$$|r_p| = |\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n| \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} r^n = r^{p+1}.\frac{1}{1-r}.$$

  Assim se $r = 1/2$, $p = 10$ tem-se

$$|r_{10}| \leq 2^{-11}.\frac{1}{1/2} = 2^{-10} < 0,001$$

- Seja $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq r < 1$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{p} a_n + \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n \qquad\qquad a_n \geq 0.$$

Tem-se

$$r_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n = a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots = a_{p+1}\left(1 + \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} + \frac{a_{p+3}}{a_{p+1}} + \ldots\right)$$

e uma vez que $\dfrac{a_{p+3}}{a_{p+1}} = \dfrac{a_{p+3}}{a_{p+2}}.\dfrac{a_{p+2}}{a_{p+1}}$

$$|r_p| \leq a_{p+1}(1 + r + r^2 + \ldots) \leq \frac{a_{p+1}}{1-r}$$

Exemplo 5.5.1. *Seja*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \stackrel{def}{=} e.$$

em que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} < 1$$

Considerando $p = 5$ *o erro que se comete na aproximação*

$$e \cong 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$$

é majorado por $0,002$ *já que*

- $\dfrac{1}{1 - 1/(n+1)} = \dfrac{n+1}{n}$

- $a_{p+1} = \dfrac{1}{(p+1)!}$

e consequentemente

$$r_p \leq \frac{7}{6}.\frac{1}{6!} < 0,002$$

5.6 Séries de potências

Definição 5.6.1. *Sendo a_n uma sucessão, chama-se série de potências de $x \in \mathbb{R}$ com coeficientes a_n à série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

A série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ identifica-se com um polinómio se todos os coeficientes a_n forem nulos a partir de certa ordem. As séries de potências podem encarar-se como generalizações de polinómios em x: $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.
Designa-se por *domínio de convergência* de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ o subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual a série é convergente.
Tal como um polinómio define uma função de variável real em $\mathbb{R}$, uma série de potências define uma função no subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a série é convergente, precisamente a função que em cada ponto desse conjunto tem por valor a soma da série no ponto considerado.

Teorema 5.6.2. *Seja a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ em que existe $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. A série é absolutamente convergente para $x \in]-r, r[$, em que*

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} .$$

Em $x \in]-\infty, -r[\cup]r, +\infty[$ a série é divergente.

Demonstração. Seja a série $|a_0| + |a_1 x| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$.
Tem-se para $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n||x^n|} = \lim_{n\to+\infty} |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} .$$

Assim pelo critério da raiz para $x \in \mathbb{R}$ fixo se $|x| \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ a série é absolutamente convergente. Consequentemente sempre que

$$|x| < \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

a série é absolutamente convergente i.e. a série de potências é absolutamente convergente para $x \in]-r, r[$.

Se $x \notin [-r, r]$ tem-se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$ e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$ é divergente o que leva a concluir que a série dada não é absolutamente convergente. Por outro lado como $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$ têm-se infinitos valores de n para os quais $\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$ concluindo-se que a sucessão $\tilde{a}_n = a_n x^n$ não tende para zero e consequentemente a série considerada é divergente para $x \in]-\infty, r[\cup]r, +\infty[$.
■

Observação 5.6.3.

- *Designa-se* $]-r, r[$ *por intervalo de convergência e* r *por raio de convergência.*

- *Se* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ *tem-se* $r = 0$ *e a série é divergente excepto em* $x = 0$*. Se* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ *tem-se* $r = +\infty$ *e a série é convergente em* $\mathbb{R}$*.*

- *O teorema anterior esclarece a convergência da série de potências* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *se* $x \neq -r$ *e* $x \neq r$ *extremos do intervalo de convergência. Não existe nenhum resultado geral para* $x = \pm r$*.*

Exemplo 5.6.4. *Analise-se em* $\mathbb{R}$ *a convergência da série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

e determine-se quando possível a sua soma.

Tem-se
$$r = \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$
Assim se $|x| < 1$ a série é absolutamente convergente e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x},$$

se $|x| > 1$ a série é divergente.

O domínio de convergência da série de potências $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pode ser obtido também partindo do critério de D'Alembert.

Corolário 5.6.5. *O raio de convergência da série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$*, sempre que exista o limite de* $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ *é dado por:*

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Demonstração. Como

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

a expressão para r obtém-se de imediato do teorema anterior.
Note-se que directamente, do critério de D'Alembert, se

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

conclui-se que x pertence ao domínio de convergência da série o que permite obter, de modo alternativo, uma expressão para r. ∎

Exemplo 5.6.6. *Analise-se em* $\mathbb{R}$ *a convergência da série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

e determine-se quando possível a sua soma.

Do corolário 5.6.5 tem-se para o raio de convergência:

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty.$$

Assim a série é absolutamente convergente em $\mathbb{R}$ e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x) = exp(x), \qquad\qquad x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.6.7. *Analise-se em* $\mathbb{R}$ *a convergência da série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots .$$

e determine-se quando possível a sua soma.

Tem-se

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1.$$

Assim se $|x| < 1$ a série é absolutamente convergente e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in]-1,1[.$$

Se $|x| > 1$ a série é divergente.

Definição 5.6.8. *Sendo a_n uma sucessão de termos reais a série de potências de $x-a$, $a \in \mathbb{R}$, é por definição a série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$$

A série de potências $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$, converge em x_0 se e só se a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$, em que $u = x_0 - a$, é convergente. Assim o domínio de convergência da série de potências de $x-a$ pode obter-se a partir do domínio de convergência da série de potências de u. Se $r = +\infty$, o domínio de convergência é $\mathbb{R}$ e se $r = 0$ é $\{a\} = [a,a]$. Para $0 < r < +\infty$ o domínio de convergência contém $]a-r, a+r[$ e está contido em $[a-r, a+r]$ sendo a convergência absoluta em qualquer ponto do primeiro intervalo.

Exemplo 5.6.9. *Determine-se o intervalo em que a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(x-3)^n$$

é absolutamente convergente.

Tem-se

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{2n+3}{2n+1} \quad \Rightarrow \quad r = 1$$

A série é absolutamente convergente no intervalo aberto $]2,4[$ sendo em $]-\infty, 2[\cup]4,+\infty[$ divergente.

Exemplo 5.6.10. *Determine-se, se possível a soma da série de potências*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^n+\frac{1}{n!}\right)(x-2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x-2)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(x-2)^n$$

Uma vez que os raios de convergência das séries parcelas são repectivamente

$$r_1=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}\right|=1 \quad \text{e} \quad r_2=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1/n!}{1/(n+1)!}\right|=+\infty$$

a série é absolutamente convergente em

$$-1<x-2<1 \;\Leftrightarrow\; 1<x<3 \;\Leftrightarrow\; x\in]1,3[$$

- Em $x=1$, a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$ é divergente.
- Em $x=3$, a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^n+\frac{1}{n!}\right)$ é divergente.

Finalmente determinando a soma no domínio de convergência tem-se:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^n+\frac{1}{n!}\right)(x-2)^n=\frac{1}{x-1}+e^{x-2}, \qquad x\in]1,3[.$$

5.7 Exercícios

5.7.1 Exercícios resolvidos

Exerc 5.7.1. *Analise a natureza das séries numéricas indicadas e determine a soma de uma delas*

$$i)\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+5}} \qquad\qquad ii)\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3-e^n}{3^n}$$

Resolução.

i) Sejam as sucessões $a_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+5}}$ e $b_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}}=\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}$ com o mesmo comportamento quando $n\to+\infty$. Tem-se

$$\lim\frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+5}}}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}}}=\lim\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{5}{n^2}}}=1\in\mathbb{R}^+,$$

Do critério de comparação as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+5}}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}$ têm a mesma natureza. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}$ é uma série de Dirichlet divergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+5}}$ é também divergente.

ii) A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3-e^n}{3^n}$ é uma série convergente pois é a adição de duas séries geométricas convergentes $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n$

A soma da série é obtida a partir da soma das anteriores séries geométricas

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3-e^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n = \frac{1}{1-1/3} - \frac{e/3}{1-e/3} = 3/2 - \frac{e}{3-e}$$

■

Exerc 5.7.2. *Analise a natureza das séries numéricas*

$$i) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+n^{7/2}} \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} \cos(n\pi).$$

Resolução.

i) Seja

$$\frac{\sqrt{n}}{n^3+n^{\frac{7}{2}}} < \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{n^3}$$

Do critério geral de comparação a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+n^{\frac{7}{2}}}$ é convergente, uma vez que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ é uma série Dirichlet convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p > 1$.

ii) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{n!}{n^n} \cos(n\pi)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.
Tem-se

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{n!} = \lim \frac{n!(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)n!} = \lim \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

Assim pelo critério de D'Alembert a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^n}$ é convergente e consequentemente a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cos(n\pi)$ é uma série absolutamente convergente.

■

Exerc 5.7.3.

Determine, se possível, o valor da soma das séries

$$i) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{e^{n-1}} \qquad\qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+n^2}$$

Resolução.

i) A série

$$2e\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{e})^n$$

é uma série geométrica convergente uma vez que tem razão inferior a um (2/e). O valor da sua soma é:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{e^{n-1}} = 2e\frac{2/e}{1-2/e} = \frac{4e}{e-2}$$

ii) A série não satisfaz a condição necessária da convergência de séries já que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1 \neq 0$$

consequentemente a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2}{1+n^2}$ é uma série divergente não tendo soma.

■

Exerc 5.7.4.

Analise a natureza das séries

$$i) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{1+3^{2n}} \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n n!} \qquad iii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos(\frac{\pi}{n+1}) - \cos(\frac{\pi}{n})\right)$$

Resolução.

i) Tem-se

$$\frac{3^n}{1+3^{2n}} \leq \frac{3^n}{3^{2n}} = \frac{1}{3^n}$$

Ora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{3})^n$$

é uma série geométrica convergente consequentemente, do critério geral de comparação a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n}{1+3^{2n}}$ é uma série convergente.

ii) A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$$

é uma série divergente, já que do critério de D'Alembert:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{2^n n!}} = \frac{(n+1)^n(n+1)}{n^n} \frac{2^n n!}{22^n(n+1)n!}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1.$$

iii)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos(\frac{\pi}{n+1}) - \cos(\frac{\pi}{n})\right) \quad \text{é uma série de Mengoli convergente}$$

já que é um caso particular da classe de séries $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+1})$ com a sucessão $a_n = \cos(\dfrac{\pi}{n})$ convergente.

■

Exerc 5.7.5.

Considere a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}$$

i) A série é absolutamente convergente? Justifique.

ii) A sucessão

$$u_n = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{5}} - ... + (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}$$

é convergente? Justifique.

Resolução.

i) Seja
$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}$$
e as sucessões
$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{n^{\frac{7}{2}}}$$
com o mesmo comportamento quando $n \to +\infty$. Tem-se
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$
e as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, do critério de comparação, têm a mesma natureza. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet convergente e consequentemente $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}$ é uma série convergente.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}$ é pois absolutamente convergente.

ii)

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}$ é uma série absolutamente convergente

é uma série convergente. Assim a sucessão das somas parciais
$$u_n = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{5}} - ... + (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}$$
é uma sucessão convergente.

■

Exerc 5.7.6.

Analise a natureza das séries numéricas indicadas e determine o valor da soma de uma delas.

$$i) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-(2n+1)} \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^4+n} \qquad iii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+e^n}$$

Resolução.

i) A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-(2n+1)} = 1/3 \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{9})^n$$

é uma série geométrica de termos positivos convergente uma vez que tem razão inferior a um (1/9). O valor da sua soma é :

$$1/3 \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{9})^n = 1/3 \frac{1/9}{1-1/9} = \frac{1}{24}$$

ii) A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^4+n}$$

é uma série convergente pelo critério de comparação já que para as sucessões com o mesmo comportamento quando $n \to +\infty$

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n^4+n} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{n^{\frac{7}{2}}}$$

se tem

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet convergente.

iii) A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+e^n}$$

é uma série convergente pelo critério de D'Alembert.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{1+e^{n+1}}}{\frac{n^2}{1+e^n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1/e^{n+1}+1/e}{1/e^{n+1}+1} = \frac{1}{e} < 1$$

■

Exerc 5.7.7. *Considere a série de potências*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}} (1-2x)^{n+3}$$

i) Indique o maior intervalo aberto onde a série é absolutamente convergente

ii) Determine no intervalo indicado em i) a soma da série.

Resolução.

i) Tem-se para o raio de convergência

$$r = \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim \frac{3^n.5^{n+2}}{5^{n+1}.3^{n+1}} = \frac{5}{3}$$

Assim série converge absolutamente se $|1-2x| < 5/3$. O maior intervalo aberto onde a série de potências é absolutamente convergente é: $]-1/3, 4/3[$

ii)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}} (1-2x)^{n+3} = \frac{(1-2x)^3}{5} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3-6x}{5}\right)^n = \frac{(1-2x)^3}{5} \frac{\frac{3-6x}{5}}{1-\frac{3-6x}{5}} = \frac{(1-2x)^4}{5+15x}$$

■

Exerc 5.7.8. *Determine o intervalo de $\mathbb{R}$ onde é convergente a série de potências*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n^2} (x-1)^{n+2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Resolução. Tem-se para o raio de convergência

$$r = \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim \frac{\frac{1}{2^n n^2}}{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2}} = 2$$

Assim a série converge absolutamente se $|x-1| < 2$ i.e. se $x \in]-1, 3[$.
Para $x = -1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série de Dirichlet convergente. Para $x = 3$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |\frac{(-1)^n}{n^2}| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série de Dirichlet convergente.
Em conclusão a série de potências converge absolutamente para $x \in [-1, 3]$.
■

5.7.2 Enunciados de exercícios

Exerc 5.7.9. *Analise a natureza das séries numéricas*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\,; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n(1-2^n)}\,; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{1+n!}$$

Exerc 5.7.10. *Considere as séries numéricas*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n n^5}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(n+1)}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2n}}{(1+e^2)^n}$$

i) As séries são convergentes? Justifique.

ii) Determine a soma de uma delas.

Exerc 5.7.11. *Seja a sucessão a_n de termos reais não nulos convergente para $a \neq 0$. A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} + a_n)$$

é convergente? Justifique.

Exerc 5.7.12. *Sendo $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n - 1)$ uma série de termos positivos convergente, qual a natureza da série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 - 1}{4 + a_n}$$

Justifique.

Exerc 5.7.13. *Considere a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x+1)^n}{n^2 2^{n-1}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Indique o maior intervalo aberto de $\mathbb{R}$ em que a série é absolutamente convergente.

Exerc 5.7.14. *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 5^{-n}(x-1)^{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

i) Determine o intervalo de $\mathbb{R}$*, onde a série é absolutamente convergente.*

ii) Determine a soma da série quando $x = 3$.

Exerc 5.7.15. *Considere a série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+2}}(x+3)^{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \right) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) Indique o intervalo de convergência da série.

ii) Indique a soma da série no intervalo de convergência indicado.

Exerc 5.7.16. *Determine o intervalo de* $\mathbb{R}$ *onde é convergente a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}(x+2)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{\sqrt{n!}} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Bibliografia

[1] J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Gulbenkian, 8a ed., 2005.

[2] W. Trench, *Introduction to Real Analysis*, Trinity University, 2003.

[3] A. Ferreira dos Santos, *Análise Matemática I e II,* Texto de apoio às aulas, AEIST, 1994-95.